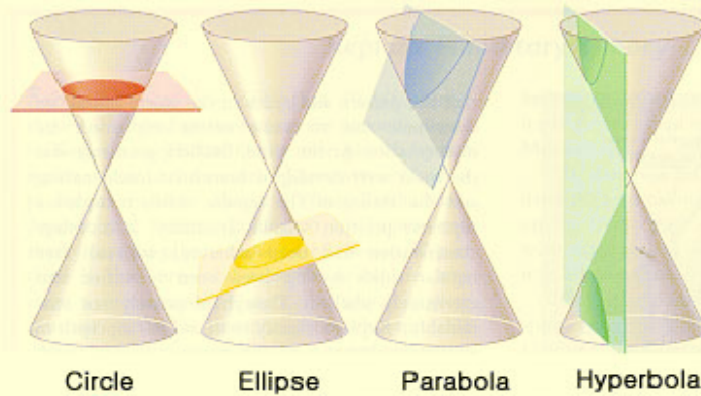


ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน  
โดยใช้โปรแกรม GSP

## ภาคตัดกรวย (Conic Sections)



หน่วยการเรียนรู้ที่ 1  
เรื่อง  
การเลื่อนขนานของแกน

ชื่อ ..... ชั้น ..... เลขที่ .....

ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน  
โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 1 เรื่อง การเลื่อนขนานของแกน

คำชี้แจง ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP  
ชุดที่ 1 เรื่อง การเลื่อนขนานของแกน (ใช้เวลา 2 คาบ) มี 1 ตอน

1. ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 1 ประกอบด้วย
  - กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 การเลื่อนขนานของแกน
  - กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 การเลื่อนขนานของแกนกับการเขียนกราฟ
  - แบบฝึกหัดที่ 1
  - แบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้ที่ 1

2. ให้นักเรียนศึกษาชุดการเรียนรู้นี้โดยการใช้โปรแกรม GSP ทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 และ 2 ตามคำแนะนำที่มีอยู่ในชุดการเรียนรู้ (ทั้งนี้ นักเรียนสามารถที่จะศึกษาวิธีการใช้เครื่องมือต่าง ๆ ของโปรแกรม GSP ได้จากคู่มือที่ได้แจกไป) เพื่อค้นหาหลักการในการเลื่อนขนานของแกน ทั้งนี้ในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรม ถ้าหากเกิดปัญหาในการเรียนก็สามารถที่จะซักถามครูหรือเพื่อน ๆ ได้

3. เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 และ 2 เสร็จแล้ว ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดที่ 1 โดยครูคอยให้ข้อเสนอแนะและตอบข้อซักถามนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจ และเมื่อทำแบบฝึกหัดเสร็จแล้ว ครูจึงเฉลยแบบฝึกหัดพร้อมกันทั้งห้อง

4. หลังจากนั้นให้นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน ชุดที่ 1 โดยให้เวลาในการทำประมาณ 20 นาที เพื่อเป็นคะแนนเก็บระหว่างเรียนของนักเรียนแต่ละคน

### จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนักเรียนศึกษาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 1 แล้ว นักเรียนสามารถ

1. บอกพิกัดของจุดเมื่อเทียบกับแกนใหม่ได้
2. เขียนกราฟโดยใช้แกนที่ได้จากการเลื่อนขนานได้

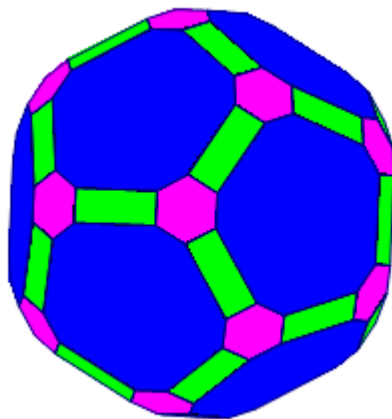
เวลาที่ใช้ 2 คาบ

### สื่อการเรียนรู้

1. โปรแกรม GSP (Geometer's Sketchpad)
2. ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 1

### การประเมินผลการเรียนรู้

ให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 1 ด้วยตนเอง เพื่อประเมินความรู้ที่ได้เรียนมา

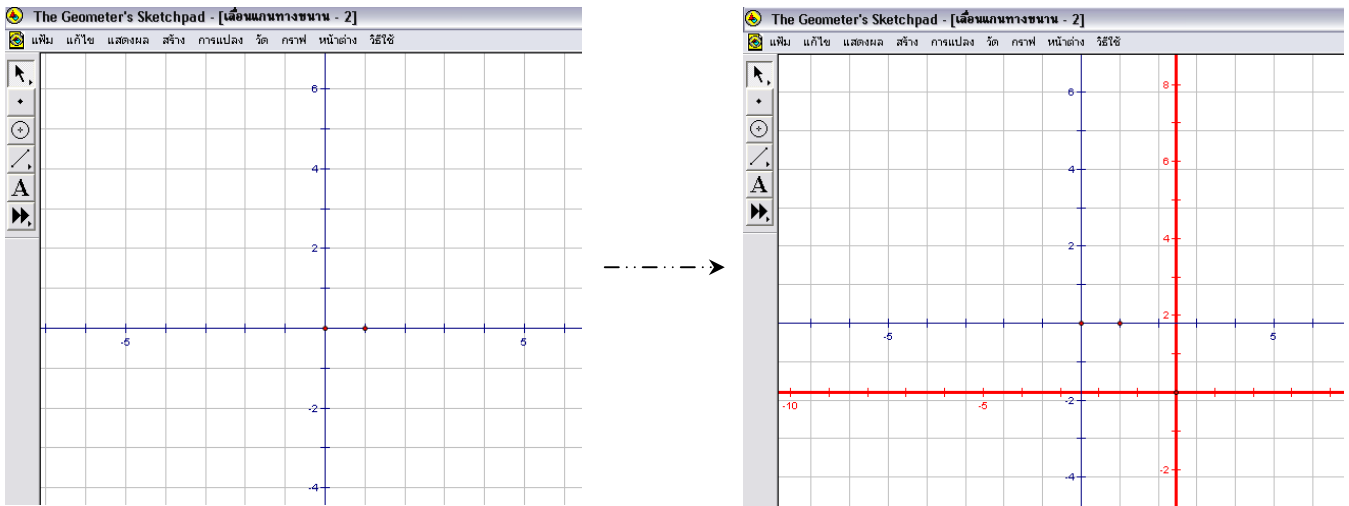


# กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1

## การเลื่อนขนานของแกน

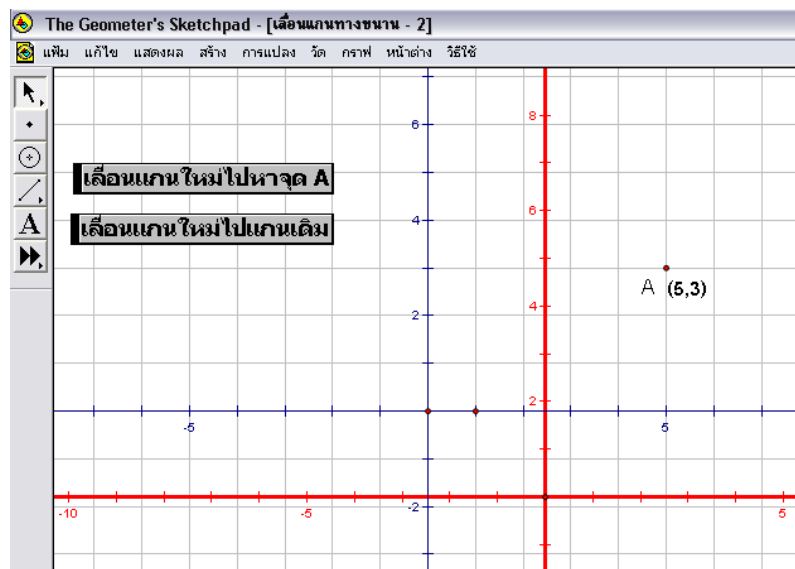
กิจกรรมการเรียนรู้ โดยใช้โปรแกรม GSP

1. ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GSP สร้างระบบพิกัดมุมฉาก โดยเลือกเมนูแล้วไปที่ **กราฟ** → **รูปแบบกริด** → **กริดจัตุรัส** หลังจากนั้นให้ทำการคัดลอกจุดกำเนิด แกน X และแกน Y ขึ้นมาด้วย (ทำเป็นเส้นหนาและเปลี่ยนสีเพื่อให้เกิดความแตกต่าง) ดังรูปที่ 1



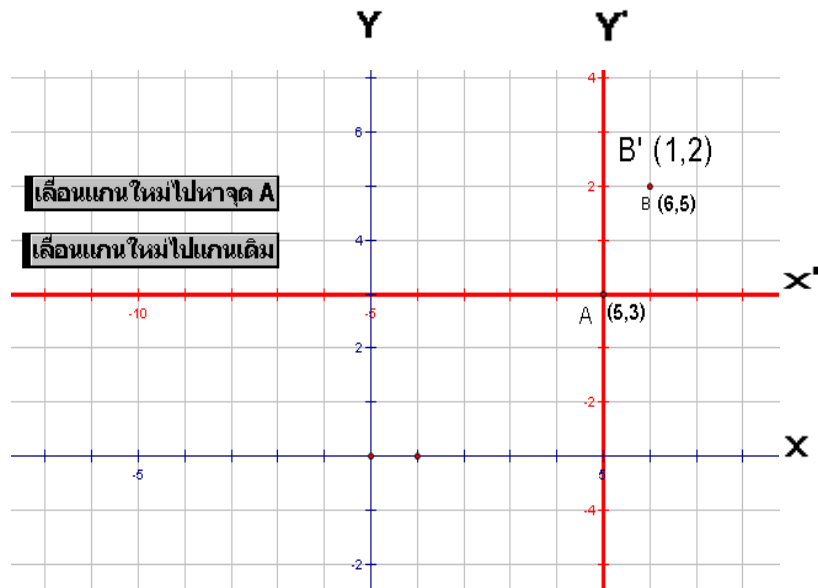
รูปที่ 1

2. ให้นักเรียนทำการสแนพจุด โดยเลือกเมนูแล้วไปที่ **กราฟ** → **สแนพจุด** จากนั้นให้ลงจุดอิสระไว้ที่พิกัดใด ๆ ก็ได้ 1 จุด พร้อมทั้งตั้งชื่อ เช่น จุด A แล้วสร้างปุ่มการเคลื่อนที่เพื่อเลื่อนจุดกำเนิด (0,0) ของแกนใหม่ไปหาจุด A ซึ่งสามารถทำได้โดยการคลิกเลือกจุดกำเนิดของแกนใหม่ก่อน แล้วจึงคลิกเลือกจุด A ตามลำดับ หลังจากนั้นเลือกเมนูแล้วไปที่ **แก้ไข** → **ปุ่มแสดงการทำงาน** → **การเคลื่อนที่** ก็จะได้ปุ่มในการเคลื่อนที่ตามต้องการ และสร้างปุ่มการเคลื่อนที่เพื่อเลื่อนจุดกำเนิด (0,0) ของแกนใหม่ไปหาจุดกำเนิด (0,0) ของแกนเดิมด้วย ดังเช่นรูปที่ 2



รูปที่ 2

3. ให้นักเรียนกดปุ่ม “เลื่อนแกนใหม่ไปแกนเดิม” ก่อน หลังจากนั้นให้ลงจุดอิสระไว้ที่พิกัดใด ๆ ก็ได้ 1 จุด (ที่ไม่ตรงกับจุด A) พร้อมทั้งตั้งชื่อ เช่น จุด B และใช้คำสั่งในโปรแกรมอ่านพิกัดที่ได้ลงไว้ จากนั้นจึงกดปุ่ม “เลื่อนแกนใหม่ไปหาจุด A” แล้วอ่านพิกัดของจุด B เมื่อเทียบกับแกนใหม่ เช่นตัวอย่างรูปที่ 3



รูปที่ 3

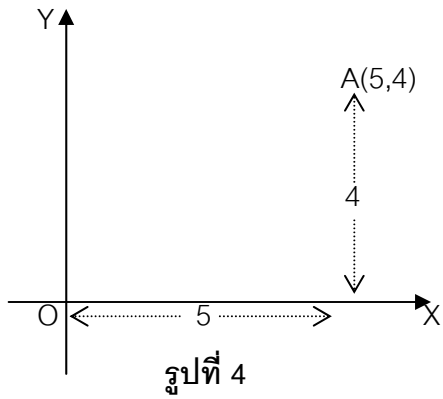
4. จากการเลื่อนขนานของแกนที่นักเรียนได้ปฏิบัติไปในข้อที่ 2 และ 3 นักเรียนได้เลือกกลางจุด A คือ ..... และจุด B คือ ..... และถ้าจุด  $B'$  คือ จุด B เมื่อใช้แกนใหม่เป็นแกนอ้างอิงแล้วพิกัดของ  $B'$  คือ .....

5. ให้นักเรียนกดปุ่ม “เลื่อนแกนใหม่ไปแกนเดิม” อีกครั้ง แล้วเปลี่ยนพิกัดของจุด A และจุด B ใหม่ จากนั้นจึงกดปุ่ม “เลื่อนแกนใหม่ไปหาจุด A” แล้วอ่านพิกัดของจุด B เมื่อเทียบกับแกนใหม่ (พิกัดของ  $B'$ ) โดยให้ทำหลายครั้ง เช่น

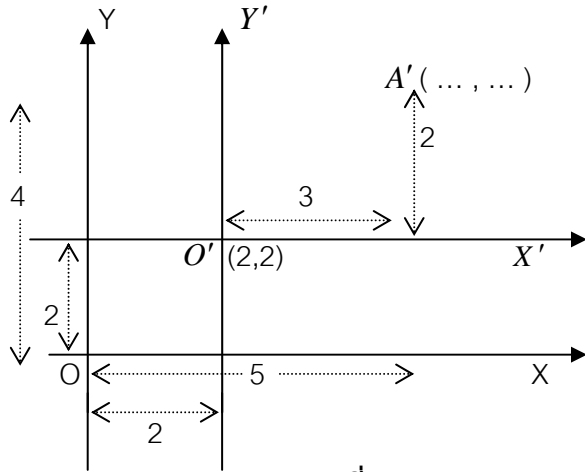
- จุด A คือ ..... และจุด B คือ ..... แล้วพิกัดของจุด  $B'$  คือ .....
- จุด A คือ ..... และจุด B คือ ..... แล้วพิกัดของจุด  $B'$  คือ .....
- จุด A คือ ..... และจุด B คือ ..... แล้วพิกัดของจุด  $B'$  คือ .....
- จุด A คือ ..... และจุด B คือ ..... แล้วพิกัดของจุด  $B'$  คือ .....
- จุด A คือ ..... และจุด B คือ ..... แล้วพิกัดของจุด  $B'$  คือ .....

จากกิจกรรมที่นักเรียนได้ปฏิบัติไป ให้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 ในรูปที่ 4 จุด  $A(5,4)$  เป็นจุดในระบบพิกัดฉากที่มีจุด  $O(0,0)$  เป็นจุดกำเนิด และมีแกน  $X$  และแกน  $Y$  แทนเส้นจำนวน ซึ่งตัดตั้งฉากกันที่จุด  $O$



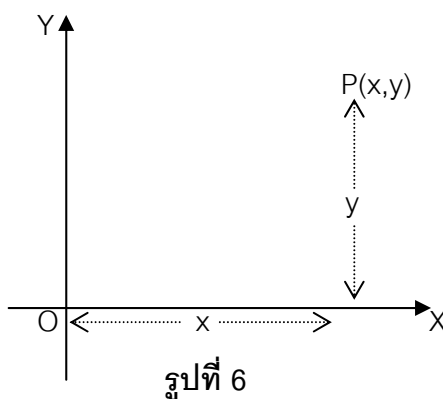
รูปที่ 4



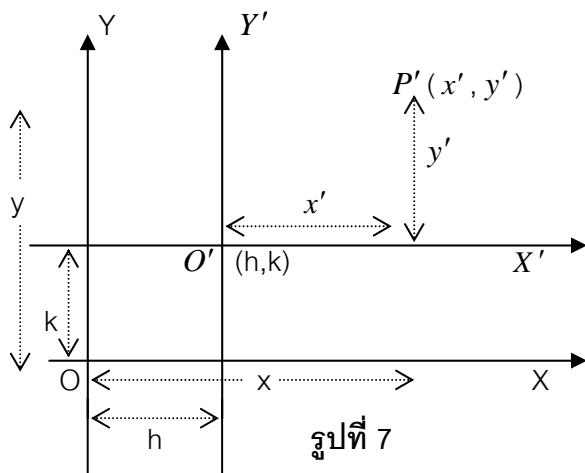
รูปที่ 5

จากรูปที่ 5 พิกัดจุด  $A(5,4)$  เมื่อเทียบกับแกนใหม่ที่มีจุด  $O'(2,2)$  เป็นจุดกำเนิด และมีแกน  $X'$  และแกน  $Y'$  แทนเส้นจำนวน ซึ่งตัดตั้งฉากกันที่จุด  $O'$  นี้ จะได้จุด  $A'$  คือ  $(\dots, \dots)$

จากกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 ที่นักเรียนได้ปฏิบัติไปนั้น การเลื่อนขนานของแกนนับเป็นพื้นฐานอย่างหนึ่งที่ใช้ช่วยให้การศึกษาภาคตัดกรวยในหลายกรณีสะดวกขึ้น โดยในระบบพิกัดฉาก กำหนดให้แกน  $X$  และแกน  $Y$  แทนเส้นจำนวน และตัดตั้งฉากกันที่จุด  $O$  ซึ่งมีพิกัดเป็น  $(0,0)$  เพื่อใช้อ้างอิงพิกัดของจุดในระนาบ เช่น  $P(x, y)$  ในรูปที่ 6 เมื่อเลื่อนแกนไปตั้งแกนใหม่ที่แกน  $X'$  และแกน  $Y'$  ตัดตั้งฉากกันที่จุด  $O'$  ซึ่งมีพิกัด  $(h,k)$  โดยแกนใหม่ขนานกับแกนเดิม ทำให้พิกัดของจุดเปลี่ยนเป็น  $(x', y')$  เมื่อเทียบกับแกนใหม่ ดังรูปที่ 7 กล่าวว่าเป็น “การเลื่อนขนานของแกน” (Translation of Axes)



รูปที่ 6



รูปที่ 7

จากรูปที่ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} x' &= \dots \\ y' &= \dots \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าเลื่อนแกนไปโดยใช้จุด (3,-2) เป็นจุดกำเนิดใหม่ จงหาพิกัดจุดต่อไปนี้ เมื่อเทียบกับแกนใหม่ (1,5) , (-2,4) , (0,7) , (-4,0) ตามลำดับ

วิธีทำ ถ้าจุด (x,y) เมื่อเทียบกับแกนเดิม มีพิกัดเมื่อเทียบกับแกนใหม่เป็น (x', y') จะได้

$$x' = x - 3$$

$$y' = y + 2$$

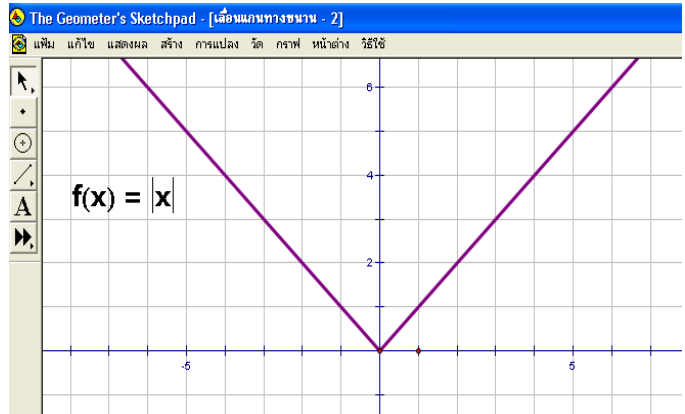
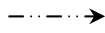
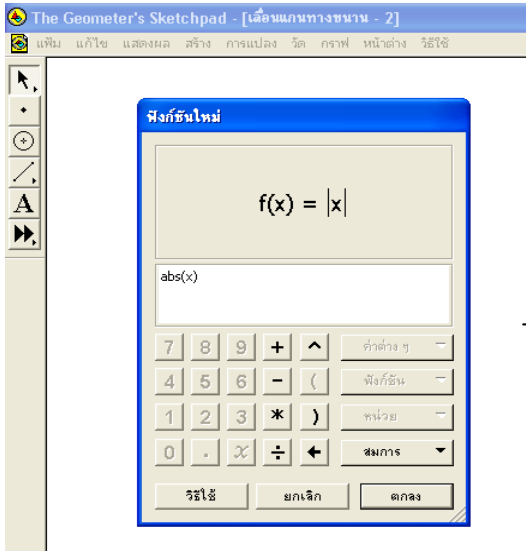
ดังนั้น พิกัดของจุดดังกล่าวเทียบกับแกนใหม่เป็นดังนี้ .....

..... ตามลำดับ

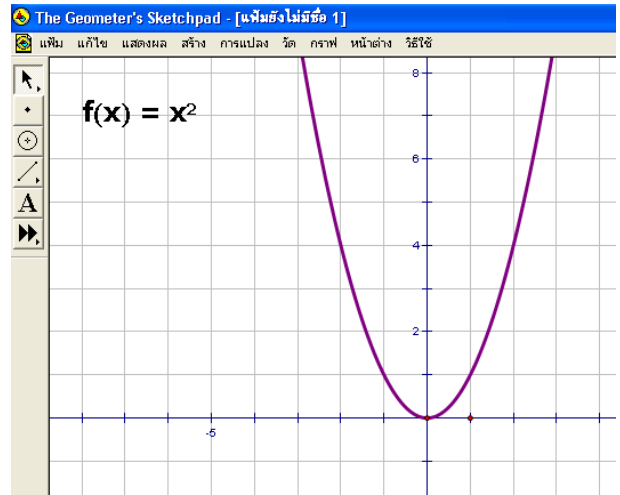
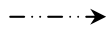
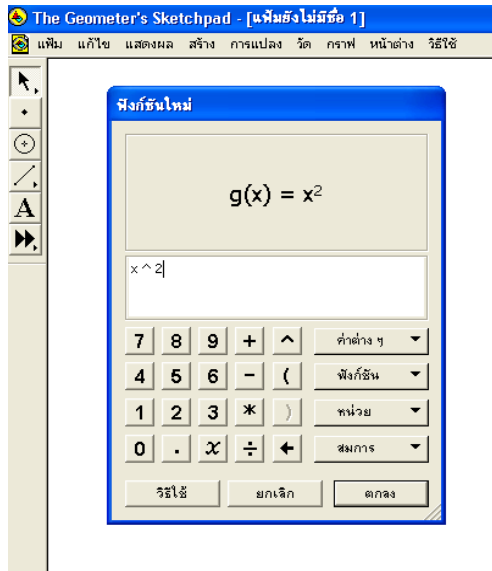
## กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2

### การเลื่อนขนานของแกนกับการเขียนกราฟ

1. ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GSP สร้างกราฟของ  $y = |x|$  และ  $y = x^2$  โดยเลือกเมนูแล้วไปที่กราฟ → วาดกราฟของฟังก์ชันใหม่ ดังรูปที่ 8 และรูปที่ 9 ตามลำดับ



รูปที่ 8



รูปที่ 9

2. ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GSP สร้างกราฟของ  $y = |x+2|+1$  และ  $y = (x-3)^2 - 1$  ซึ่งจะได้จุดยอดของกราฟอยู่ที่ ..... และ ..... ตามลำดับ



**การเลื่อนขนานของแกนกับการเขียนกราฟ**

กราฟของสมการบางสมการ ถ้าเขียนกราฟในระบบพิกัดฉากที่จุด (0,0) อาจเขียนได้ยาก แต่ถ้าเลื่อนแกนไปที่ (h,k) ที่เหมาะสม และเปลี่ยนจุด P(x,y) ใดๆ เป็น P (x' , y' ) โดย  $x' = x - h$  และ  $y' = y - k$  จะทำให้สมการเทียบกับแกนใหม่มีรูปง่ายต่อการเขียนกราฟ ดังตัวอย่าง

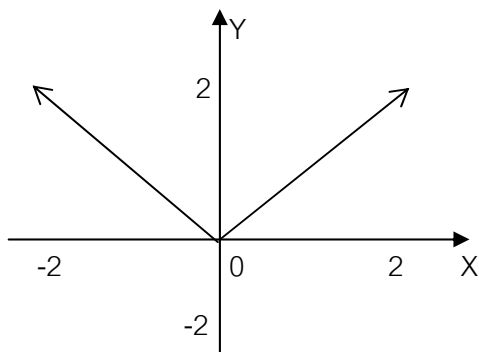
**ตัวอย่างที่ 3** จงเขียนกราฟของ  $y = |x + 2| + 1$

วิธีทำ จัดสมการได้เป็น  $y - 1 = |x + 2|$

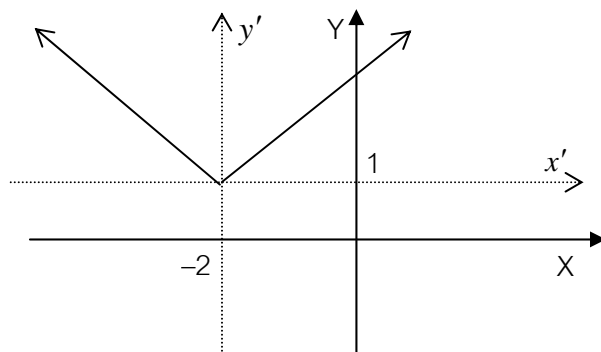
จาก  $x' = x - h$  และ  $y' = y - k$

จะได้สมการเทียบกับแกนใหม่ คือ  $y' = |x'|$

นั่นคือ เขียนกราฟ  $y = |x|$  เลื่อนแกนไปที่จุด .....



กราฟ  $y = |x|$



กราฟ  $y = |x + 2| + 1$

**ตัวอย่างที่ 4** จากสมการที่กำหนด ถ้าต้องการเลื่อนแกนอ้างอิงเพื่อให้ได้สมการที่กำหนด จะเลือกจุดใดเป็นจุดกำเนิด

(1)  $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$  ต้องการสมการในรูป  $(x')^2 + (y')^2 = 9$

(2)  $y = x^2 - 6x + 7$  ต้องการสมการในรูป  $y' = (x')^2$

วิธีทำ (1)  $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 = -8 + 16 + 1$$

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

ดังนั้น ต้องเลือกจุด (4,-1) เป็นจุดกำเนิดใหม่

(2)  $y = x^2 - 6x + 7$

.....  
 .....  
 .....  
 .....

ดังนั้น ต้องเลือกจุด ..... เป็นจุดกำเนิดใหม่

**แบบฝึกหัดที่ 1**

1. จากสมการต่อไปนี้ ถ้าต้องการเลื่อนแกนอ้างอิงเพื่อให้ได้สมการในรูปที่กำหนด จะเลือกจุดใดเป็นจุดกำเนิด

1)  $(x - 4)(y + 3) = 1$  ถ้าต้องการสมการในรูป  $x' y' = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

2)  $x = |y - 1| + 2$  ถ้าต้องการสมการในรูป  $x' = |y'|$

.....

.....

.....

.....

.....

3)  $x = y^2 + 4y + 5$  ถ้าต้องการสมการในรูป  $x' = (y')^2$

.....

.....

.....

.....

.....

4)  $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$  ถ้าต้องการสมการในรูป  $(x')^2 + (y')^2 = 9$

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาจุดยอดของกราฟต่อไปนี้ พร้อมทั้งใช้โปรแกรม GSP เขียนกราฟของสมการเพื่อตรวจสอบคำตอบที่ถูกต้อง

1)  $y = |x + 1|$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

2)  $y = (x - 1)^2 + 1$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

3)  $y = x^2 + 3x + 2$

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

**แบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้ที่ 1**

1. กำหนดให้เลื่อนขนานของแกนโดยให้จุดกำเนิดไปอยู่ที่จุด  $(-3, 5)$  โดยมีจุด  $A(3, 2)$ ,  $B(-4, 1)$ ,  $C(0, 0)$  และ  $D(-3, 5)$  เป็นพิกัดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม จงหาพิกัดของจุด  $A$ ,  $B$ ,  $C$  และ  $D$  เมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่

.....

.....

.....

.....

.....

2. กำหนดให้เลื่อนขนานของแกนโดยให้จุดกำเนิดไปอยู่ที่จุด  $(2, 4)$  โดยมีจุด  $P(2, 3)$ ,  $Q(-1, 4)$ ,  $R(-1, -3)$  และ  $D(8, 6)$  เป็นพิกัดเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่ จงหาพิกัดของจุด  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  และ  $S$  เมื่อเทียบกับแกนพิกัดเดิม

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงหาพิกัด  $(h, k)$  ซึ่งเมื่อเลื่อนขนานของแกนโดยให้จุดกำเนิดไปอยู่ที่จุด  $(h, k)$  แล้วสมการเมื่อเทียบกับแกนพิกัดใหม่จะอยู่ในรูปสมการที่ต้องการ

<b>สมการเดิม</b>	<b>สมการใหม่</b>
$2x - 3y + 9 = 0$	$2x' = 3y'$

.....

.....

.....

.....

.....

สมการเดิม

$$3x + 4y + 7 = 0$$

สมการใหม่

$$3x' + 4y' = 0$$

.....

.....

.....

.....

สมการเดิม

$$y^2 - 4y + 2x - 6 = 0$$

สมการใหม่

$$(y')^2 + 2x' = 0$$

.....

.....

.....

.....

สมการเดิม

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 24 = 0$$

สมการใหม่

$$(x')^2 + (y')^2 = 1$$

.....

.....

.....

.....

สมการเดิม

$$4x^2 - 8x + 9y^2 + 18y = 23$$

สมการใหม่

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1$$

.....

.....

.....

.....