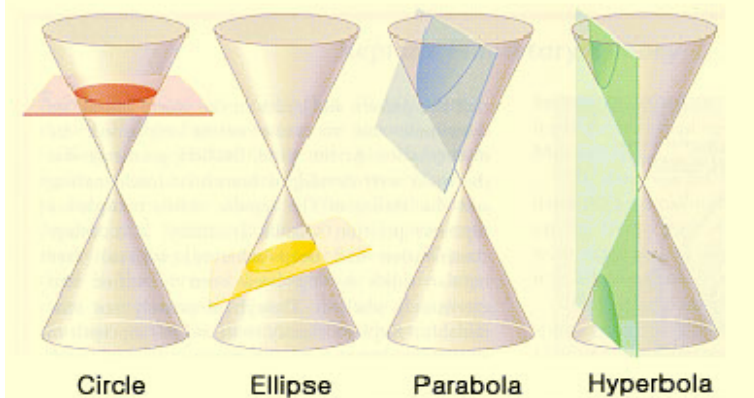


ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน
โดยใช้โปรแกรม GSP

ภาคตัดกรวย (Conic Sections)



หน่วยการเรียนรู้ที่ 4

เรื่อง

วงรี

ชื่อ ชั้น เลขที่

ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน
โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 4 เรื่อง วงรี

คำชี้แจง ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP
ชุดที่ 4 มี 2 ตอน ได้แก่

ตอนที่ 1 นิยามของวงรี (ใช้เวลา 2 คาบ)

ตอนที่ 2 วงรีที่มีจุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลาง (ใช้เวลา 2 คาบ)

1. ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 4 ประกอบด้วย

- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 นิยามของวงรี
- กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 วงรีที่มีจุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลาง
- แบบฝึกหัดที่ 1
- แบบฝึกหัดที่ 2
- แบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้ที่ 4

2. ให้นักเรียนศึกษาชุดการเรียนรู้นี้โดยการใช้โปรแกรม GSP ทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 ตาม
คำแนะนำที่มีอยู่ในชุดการเรียนรู้ เพื่อด้านนิยามของวงรีและทำแบบฝึกหัดที่ 1 เมื่อทำแบบฝึกหัดเสร็จ
แล้ว ครูจึงเฉลยแบบฝึกหัดพร้อมกันทั้งห้อง

3. ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GSP ทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 เพื่อสำรวจวงรีที่มีจุด (h,k) เป็น
จุดศูนย์กลาง แล้วทำการสรุป และทำแบบฝึกหัดที่ 2 เมื่อทำแบบฝึกหัดเสร็จแล้ว ครูจึงเฉลยแบบฝึกหัด
พร้อมกันทั้งห้อง ทั้งนี้ในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรม ถ้าหากเกิดปัญหาในการเรียนก็สามารถที่จะ
ซักถามครูหรือเพื่อน ๆ ได้

4. หลังจากนั้นให้นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวน
สอบสวน ชุดที่ 4 โดยให้เวลาในการทำประมาณ 20 นาที เพื่อเป็นคะแนนเก็บระหว่างเรียนของนักเรียน
แต่ละคน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนักเรียนศึกษาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 4 แล้ว นักเรียนสามารถ

1. อธิบายความหมายของวงรีได้
2. บอกส่วนต่าง ๆ ของวงรีเมื่อกำหนดสมการความสัมพันธ์ที่เป็นวงรีได้
3. เขียนความสัมพันธ์และกราฟวงรีที่มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลางจากสมบัติที่กำหนดได้
4. เขียนความสัมพันธ์และกราฟวงรีที่มีจุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลางจากสมบัติที่กำหนดได้

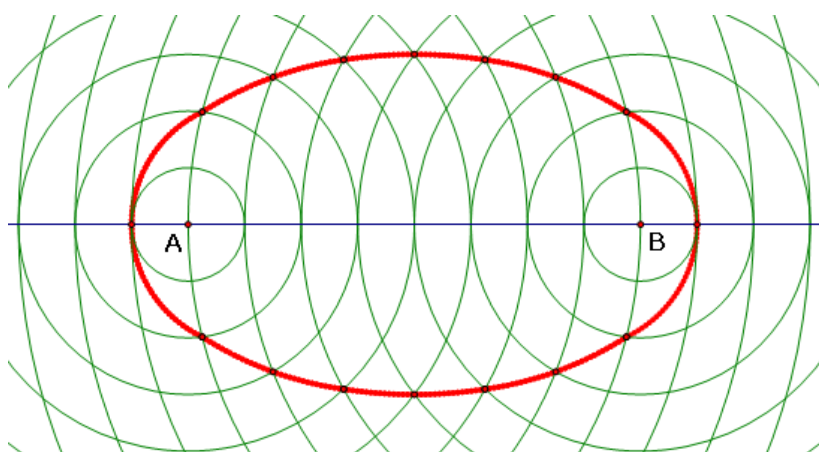
เวลาที่ใช้ 4 คาบ

สื่อการเรียนรู้

1. โปรแกรม GSP (Geometer's Sketchpad)
2. ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 4

การประเมินผลการเรียนรู้

ให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 4 ด้วยตนเอง เพื่อประเมินความรู้ที่ได้เรียนมา

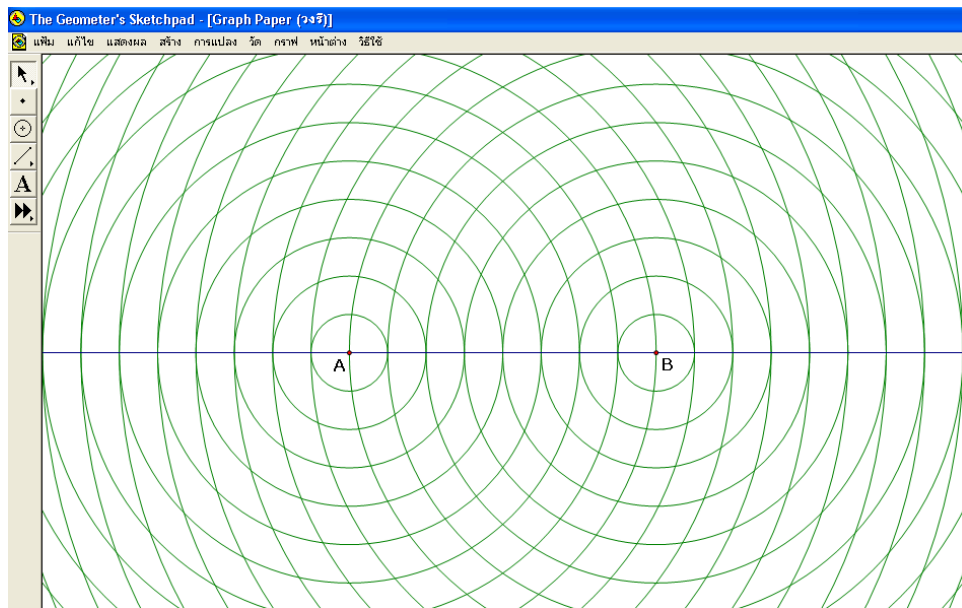


กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1

นิยามของวงรี

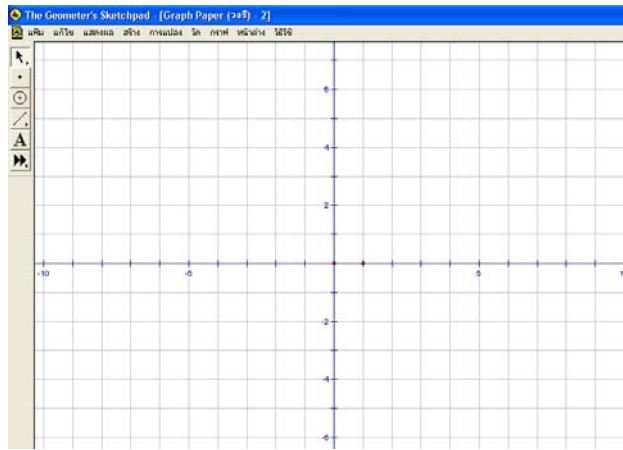
กิจกรรมการเรียนรู้ โดยใช้โปรแกรม GSP

1. ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GSP สร้าง Graph Paper ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ 2 จุด และจุดศูนย์กลางทั้งสองนั้นห่างกัน 8 หน่วย พร้อมทั้งตั้งชื่อจุดศูนย์กลางด้วย (เช่น ชื่อจุด A และจุด B) ดังรูปที่ 1



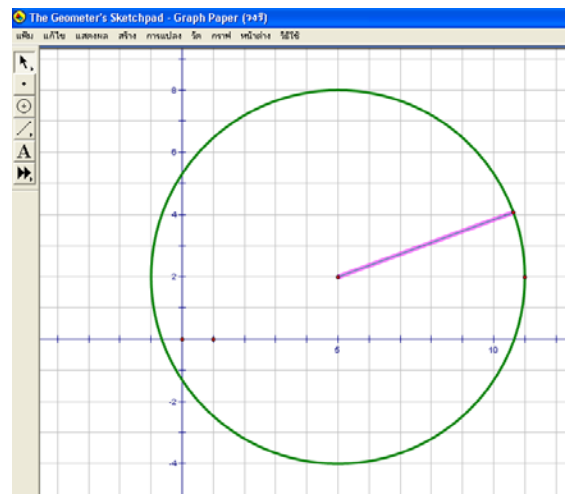
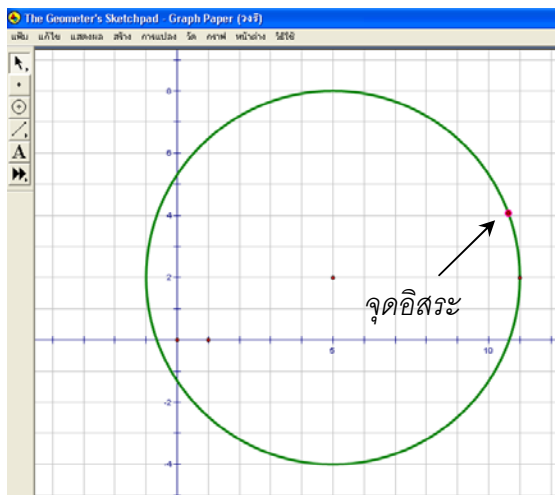
รูปที่ 1 Graph Paper

2. ให้นักเรียนสร้างจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุด A 1 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 9 หน่วย เอาไว้ 1 จุด แล้วสร้างจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุด A 9 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 1 หน่วย อีก 1 จุด
3. จากนั้นให้นักเรียนลงจุดซึ่งเป็นจุดตัดของวงกลม ตามเงื่อนไขดังนี้
 - เป็นจุดที่อยู่ห่างจากจุด A 2 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 8 หน่วย
 - เป็นจุดที่อยู่ห่างจากจุด A 3 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 7 หน่วย
 - เป็นจุดที่อยู่ห่างจากจุด A 4 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 6 หน่วย
 - เป็นจุดที่อยู่ห่างจากจุด A 5 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 5 หน่วย
 - เป็นจุดที่อยู่ห่างจากจุด A 6 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 4 หน่วย
 - เป็นจุดที่อยู่ห่างจากจุด A 7 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 3 หน่วย
 - เป็นจุดที่อยู่ห่างจากจุด A 8 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 2 หน่วย
4. สร้างรอยทางเดินของจุดที่ได้สร้างไว้ตามเงื่อนไข แล้วให้นักเรียนสังเกตลักษณะรอยทางเดินของจุดเหล่านั้นว่ามีรูปเป็นอย่างไร
5. ให้นักเรียนเพิ่มหน้าใหม่จากตัวเลือกเอกสาร หลังจากนั้นให้สร้างระบบพิกัดขึ้นมา (โดยเลือกเป็นกริดจตุรัส) ดังรูปที่ 2



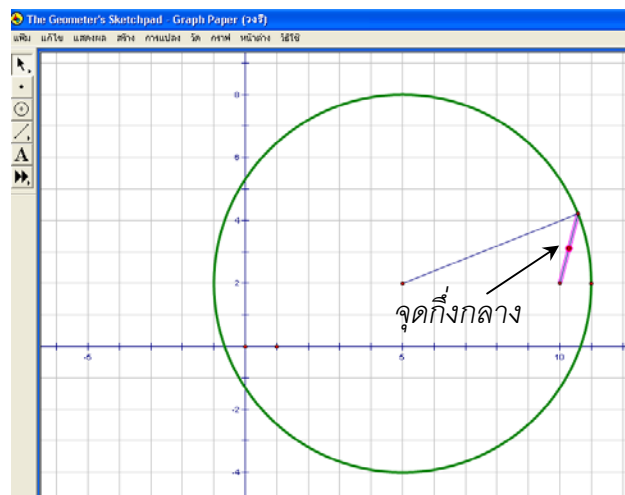
รูปที่ 2 ระบบพิกัด (กริดจตุรัส)

6. ให้นักเรียนสร้างวงกลมไว้ในระบบพิกัดขนาดพอสมควร แล้วให้ลงจุดอิสระไว้บนเส้นรอบวง 1 จุด หลังจากนั้นให้สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางกับจุดอิสระนี้ ดังรูปที่ 3



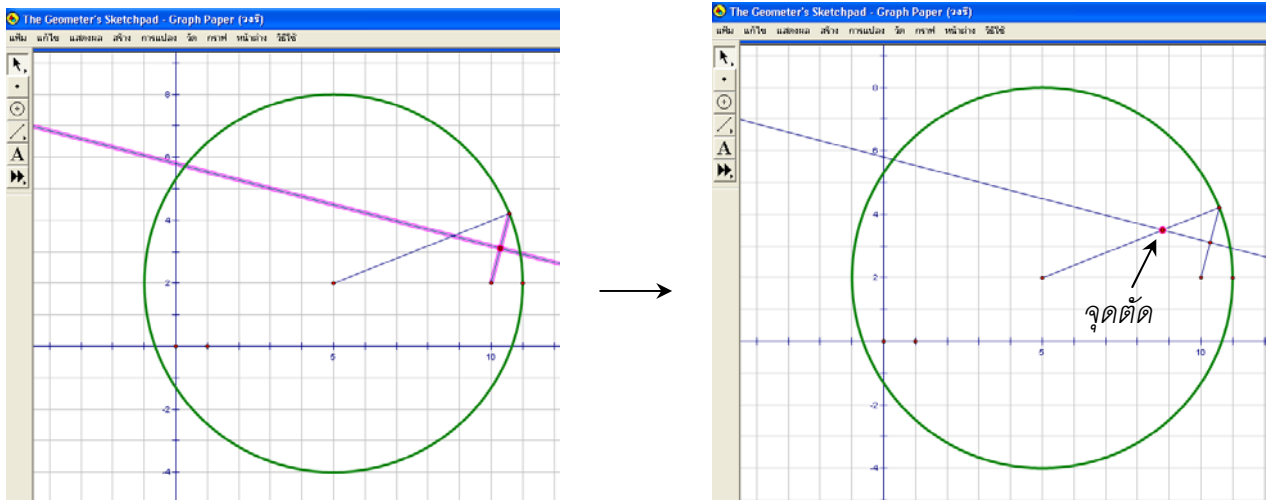
รูปที่ 3

7. สร้างจุดในระบบพิกัดซึ่งอยู่ห่างจากเส้นรอบวงเป็นระยะ 1 หน่วย แล้วสร้างส่วนของเส้นตรง เชื่อมระหว่างจุดในระบบพิกัดกับจุดอิสระบนเส้นรอบวงจากข้อ 6 หลังจากนั้นให้คลิกเลือกส่วนของเส้นตรงนี้แล้วไปที่ สร้าง → จุดกึ่งกลาง ซึ่งก็จะได้จุดกึ่งกลางอยู่บนส่วนของเส้นตรง ดังรูปที่ 4



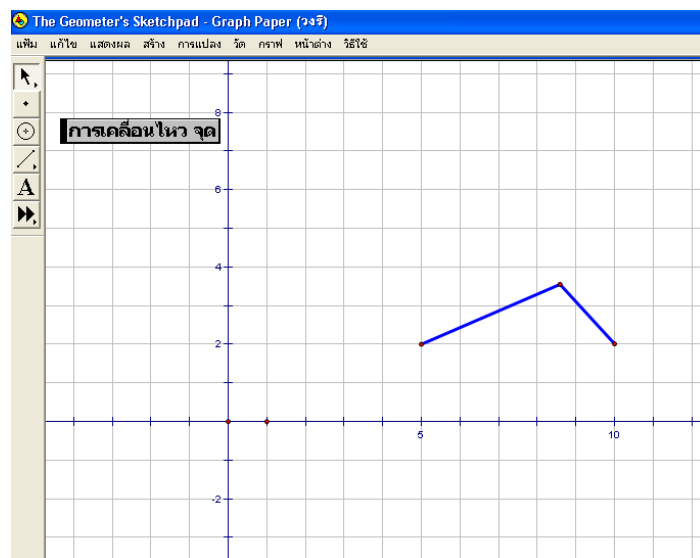
รูปที่ 4

8. ให้นักเรียนคลิกเลือกส่วนของเส้นตรงและจุดกึ่งกลางที่สร้างจากข้อ 7 แล้วไปที่คำสั่งสร้าง → เส้นตั้งฉาก จากนั้นให้สร้างจุดตัดระหว่างเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5

9. จากรูปที่ 5 ให้นักเรียนสร้างปุ่มเพื่อเคลื่อนที่จุดอิสระบนเส้นรอบวง และสร้างรอยทางเดินของจุดตัดที่ได้จากข้อ 8 แล้วซ่อนเส้นและจุดที่ไม่ใช้ พร้อมทั้งสร้างส่วนของเส้นตรง (เส้นหนา) ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6

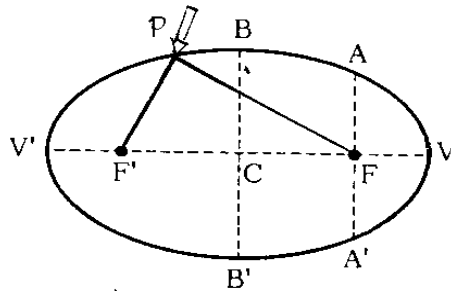
10. จากนั้นใช้คำสั่งการวัดเพื่อวัดความยาวส่วนของเส้นตรงทั้ง 2 เส้น และเมื่อกดปุ่มเคลื่อนที่จุดแล้ว ให้นักเรียนสังเกตลักษณะรอยทางการเดินของจุด กับผลบวกของความยาวส่วนของเส้นตรงทั้ง 2 เส้น แล้วสรุปเป็นนิยามของวงรี

วงรี (Ellipse)

บทนิยาม วงรี คือ

.....

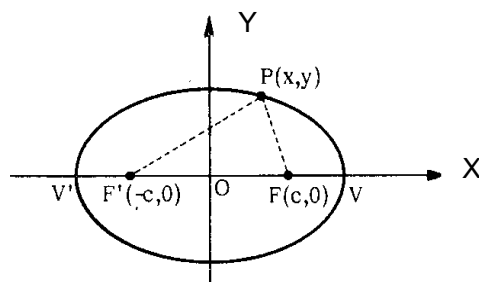
.....



- จุดคงที่ (จุด F' และ F) เรียกว่า **โฟกัส**
- P เป็นจุดใดๆ บนวงรี $PF' + PF$ เรียกว่า **ผลบวกคงตัว**
- จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง (จุด C) เรียกว่า **จุดศูนย์กลางของวงรี**
- จุดที่เส้นตรงซึ่งลากผ่านโฟกัสทั้งสองตัดกับวงรี (V และ V') เรียกว่า **จุดยอดของวงรี**
- ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง ($\overline{V'V}$) เรียกว่า **แกนเอก (major axis)** ของวงรี
- ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่จุดศูนย์กลาง และมีจุดปลายอยู่บนวงรีทั้งสองด้าน เรียกว่า **แกนโท (minor axis)** ของวงรี
- ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่โฟกัส และมีจุดปลายทั้งสองด้านบนวงรี เรียกว่า **เลตัสเรกตัมของวงรี**

วงรีที่มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง

กรณีที่ 1 โฟกัสอยู่บนแกน X ที่จุด $F'(-c,0)$ และ $F(c,0)$



ถ้า $P(x,y)$ เป็นจุดใดๆ บนวงรี โดยผลบวกคงตัวเท่ากับ $2a$ หน่วย

จากบทนิยาม $PF' + PF = \dots\dots\dots$ โดยที่ $2a > 2c$

จะได้ $\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \dots\dots\dots$

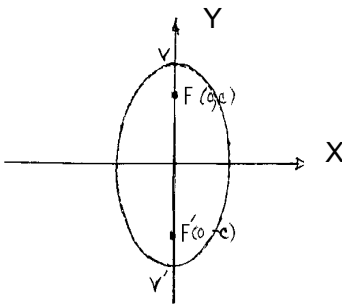
.....

เนื่องจาก $0 < c < a$ ดังนั้น $a^2 - c^2$ เป็นจำนวนบวก
 ให้ $a^2 - c^2 = b^2$; $b > 0$ จะได้

สมการวงรีที่มีจุด $(-c,0)$ และ $(c,0)$ เป็นโฟกัส โดยผลบวกคงตัวมีค่า $2a$ หน่วย

กรณีที่ 2 โฟกัสอยู่บนแกน Y ที่จุด $F'(0,-c)$ และ $F(0,c)$

จากกราฟดังรูป ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า



สมการวงรีที่มีจุด $(0,-c)$ และ $(0,c)$ เป็นโฟกัส โดยผลบวกคงตัวมีค่า $2a$ หน่วย

ข้อสรุปวงรีที่มีจุด (0,0) เป็นจุดศูนย์กลางในระดับชั้นนี้มี 2 กรณี ดังตาราง

สมการ	สมการ			
<table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td>$a > b > 0$</td> <td>$b^2 = a^2 - c^2$</td> <td>$a > c > 0$</td> </tr> </table>		$a > b > 0$	$b^2 = a^2 - c^2$	$a > c > 0$
$a > b > 0$	$b^2 = a^2 - c^2$	$a > c > 0$		
<p>จุดศูนย์กลาง (0,0) โฟกัส (c,0) และ (-c,0) จุดยอด และ จุดปลายแกนโท และ แกนเอกทับแกน และยาว แกนโทยาว</p>	<p>จุดศูนย์กลาง (0,0) โฟกัส (0,c) และ (0,-c) จุดยอด และ จุดปลายแกนโท และ แกนเอกทับแกน และยาว แกนโทยาว</p>			
<p>เลตัสเรกตรัมยาว</p>	<p>เลตัสเรกตรัมยาว</p>			

- หมายเหตุ (1) การเขียนกราฟวงรีอย่างง่ายลงจุดยอดและจุดปลายแกนโทแล้วลากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ด้านทั้งสี่ผ่านจุดยอดและจุดปลายแกนโท เรียกรูปสี่เหลี่ยมนี้ว่า **สี่เหลี่ยมกำกับ** วงรีที่ต้องการจะแนบในรูปสี่เหลี่ยมโดยด้านทั้งสี่สัมผัสวงรีที่จุดยอด และจุดปลายแกนโท
- (2) ในการเขียนกราฟวงรี การแบ่งแกน X และแกน Y ต้องใช้อัตราส่วนเดียวกัน

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ ซึ่งมีกราฟเป็นวงรี จงหาจุดยอด จุดปลายแกนโท โฟกัส และความยาวแกนเอก พร้อมเขียนกราฟโดยใช้โปรแกรม GSP

1) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x^2 + 9y^2 = 36 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาสมการวงรี ที่มีสมบัติต่อไปนี้

1) โฟกัสอยู่ที่ $(-5,0)$ และ $(5,0)$ และผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีถึงโฟกัสทั้งสอง เท่ากับ 12 หน่วย

.....

.....

.....

.....

.....

2) โฟกัสอยู่ที่ $(0, \pm 8)$ และจุดปลายแกนโทอยู่ที่ $(\pm 15, 0)$

.....

.....

.....

.....

.....

3) โฟกัสอยู่ที่ $(\pm 8, 0)$ และวงรีผ่านจุด $(8, \frac{18}{5})$

.....

.....

.....

.....

.....

4) จุดศูนย์กลาง $(0,0)$ แกนเอกอยู่บนแกน y ยาว 8 หน่วย และความยาวเลตัสเรกตรัม $\frac{9}{2}$ หน่วย

.....

.....

.....

.....

.....

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2

วงรีที่มีจุด (h , k) เป็นจุดศูนย์กลาง

กิจกรรมการเรียนรู้ โดยใช้โปรแกรม GSP

1. ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GSP สร้างกราฟวงรีที่มีจุด (0,0) เป็นจุดศูนย์กลาง ขึ้นมา 1 รูป โดยเลือกเมนูแล้วไปที่ กราฟ → วาดกราฟของฟังก์ชันใหม่ แล้วใส่สมการวงรีเข้าไป

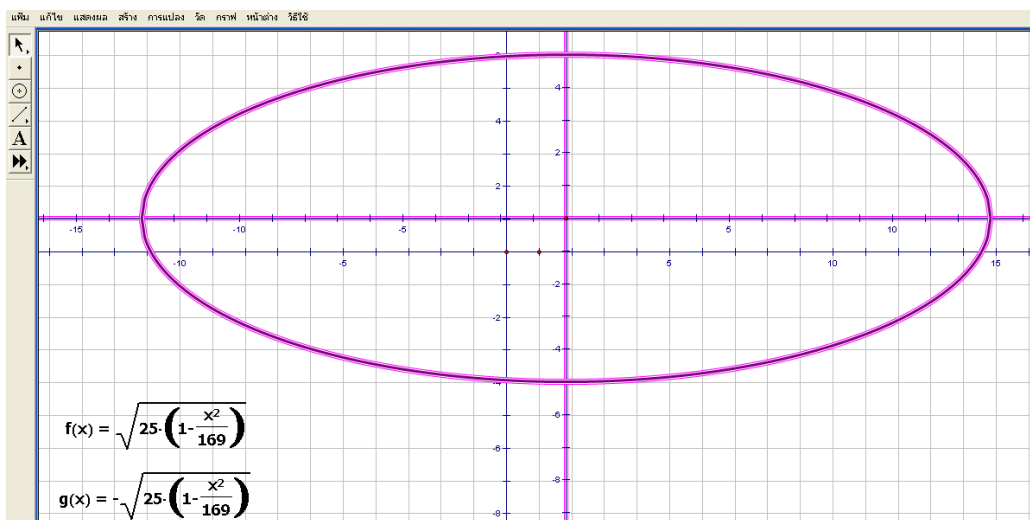
(หมายเหตุ : นักเรียนต้องจำไว้ว่าโปรแกรม GSP จะเขียนกราฟของฟังก์ชันเท่านั้น เช่น

ถ้าต้องการกราฟวงรีจากสมการ $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ นักเรียนจะต้องจัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูป

ของฟังก์ชัน คือ $y = \pm \sqrt{25 \left(1 - \frac{x^2}{169} \right)}$ ซึ่งก็คือ $f(x) = \pm \sqrt{25 \left(1 - \frac{x^2}{169} \right)}$ นั่นเอง)

2. ให้นักเรียนเลื่อนวงรีที่มีจุด (0,0) เป็นจุดศูนย์กลางที่สร้างขึ้น ไปไว้ที่จุด (h,k) แล้วแต่นักเรียนจะกำหนด โดยมีขั้นตอน ดังนี้

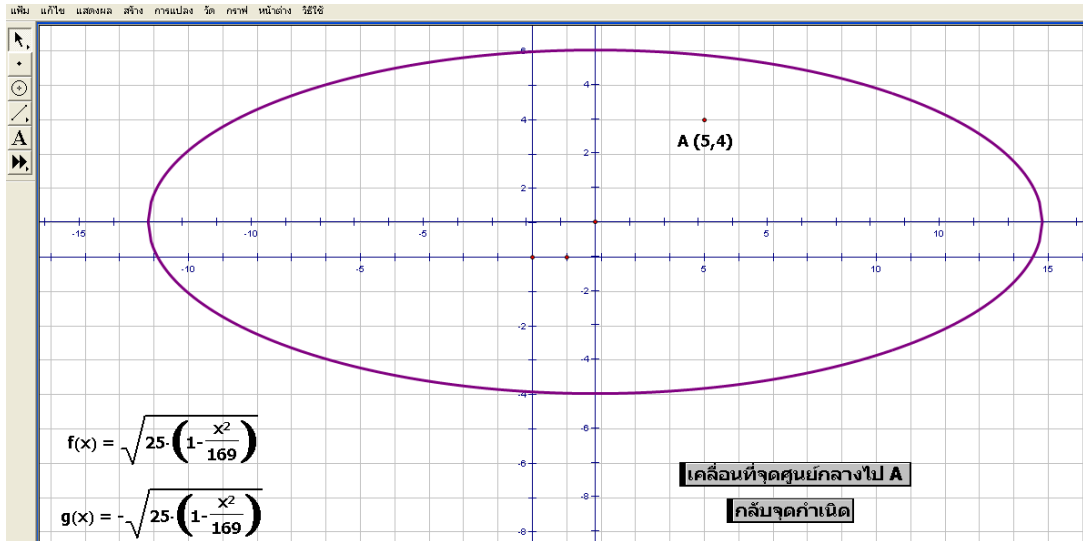
2.1 ให้คลิกเลือกจุดศูนย์กลาง (0,0) แกน X แกน Y และกราฟวงรีที่สร้างไว้ แล้วทำการคัดลอก จากนั้นให้ซ้อนกราฟวงรีรูปเดิม ก็จะได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

2.2 ให้นักเรียนทำการสแนพจุด โดยเลือกเมนูแล้วไปที่ กราฟ → สแนพจุด จากนั้นให้ลงจุดอิสระ (h,k) ไว้ที่พิกัดใด ๆ ก็ได้ 1 จุด พร้อมทั้งตั้งชื่อ เช่น จุด A แล้วสร้างปุ่มการเคลื่อนที่เพื่อเลื่อนจุดศูนย์กลางไปหาจุด A และสร้างปุ่มการเคลื่อนที่เพื่อเลื่อนจุดศูนย์กลางไปหาจุดกำเนิด (0,0) ด้วย ดังรูปที่ 2 หลังจากนั้นให้นักเรียนลองเลื่อนจุด A ไปไว้ที่พิกัดต่าง ๆ แล้วกดปุ่มเลื่อนจุดศูนย์กลางของกราฟวงรีไปหาจุด A พร้อมทั้งสังเกตพิกัดของจุดศูนย์กลางของวงรีที่เปลี่ยนไปตามจุด A เช่น

- พิกัดของจุด A คือ จะได้จุดศูนย์กลางของวงรี คือ
- พิกัดของจุด A คือ จะได้จุดศูนย์กลางของวงรี คือ
- พิกัดของจุด A คือ จะได้จุดศูนย์กลางของวงรี คือ

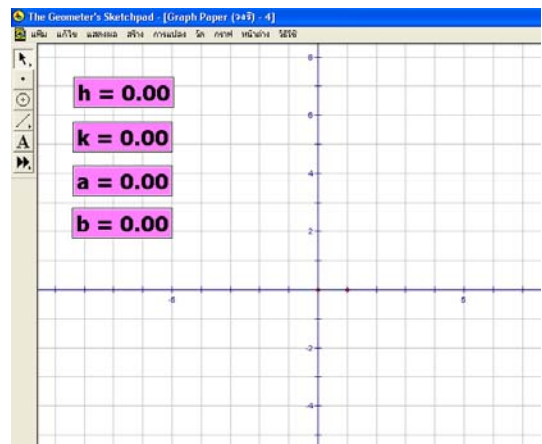
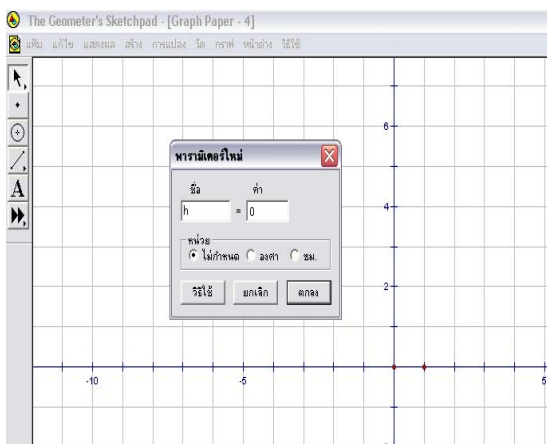


รูปที่ 2

3. จากวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0,0) และเลื่อนขนานแกนไปที่ (h,k) ดังนั้นสมการวงรีเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ และ $\frac{(x')^2}{b^2} + \frac{(y')^2}{a^2} = 1$ แต่จากการเลื่อนขนานของแกน นักเรียนทราบมาแล้วว่า $x' = \dots\dots\dots$ และ $y' = \dots\dots\dots$ ดังนั้น จะได้สมการวงรีเทียบกับแกนเดิม คือ $\frac{(\dots\dots\dots)^2}{a^2} + \frac{(\dots\dots\dots)^2}{b^2} = 1$ และ $\frac{(\dots\dots\dots)^2}{b^2} + \frac{(\dots\dots\dots)^2}{a^2} = 1$ ตามลำดับ

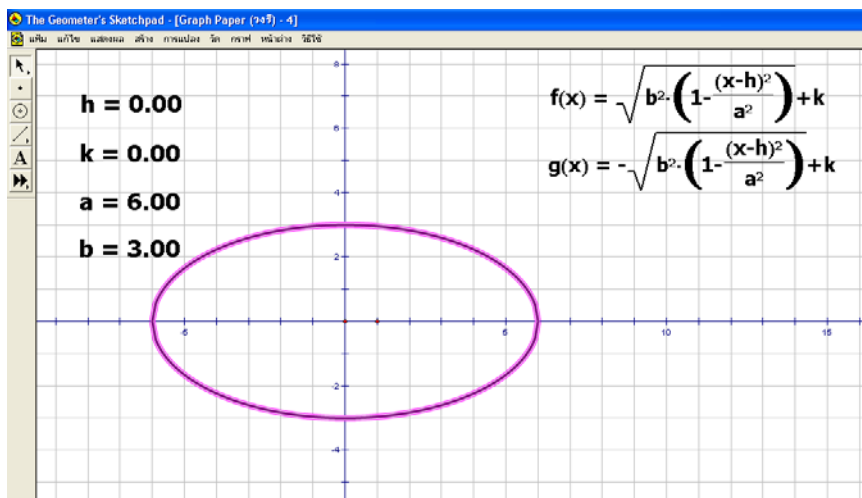
4. ให้นักเรียนสร้างหน้าเอกสารใหม่ แล้วสร้างกราฟของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) ตามขั้นตอนต่อไปนี้

4.1 สร้างระบบพิกัดเป็นกริดแบบจัตุรัส แล้วไปที่ กราฟ → พารามิเตอร์ใหม่ ตั้งชื่อ h และค่าเป็น 0 ดังรูปที่ 3 โดยให้นักเรียนใช้คำสั่งพารามิเตอร์ใหม่นี้สร้างค่าของ k , a และ b ด้วย ตามลำดับ



รูปที่ 3

4.2 ให้นักเรียนใช้คำสั่ง **วาดกราฟของฟังก์ชันใหม่** เพื่อเขียนกราฟวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) ซึ่งนักเรียนจะต้องจัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน โดยสมการวงรี $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จัดสมการใหม่เป็น $y = \pm \sqrt{b^2(1 - \frac{(x-h)^2}{a^2})} + k$ และสมการวงรี $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ จัดสมการใหม่เป็น $y = \pm \sqrt{a^2(1 - \frac{(x-h)^2}{b^2})} + k$ เมื่อนักเรียนจัดสมการใหม่ได้แล้วให้สร้างสมการในคำสั่งเขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่ โดยแทนค่าของ h , k , a และ b ด้วยค่าพารามิเตอร์ที่ได้สร้างไว้ก็จะได้กราฟวงรีตามต้องการ ดังรูปที่ 4 (เป็นกราฟของสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$)



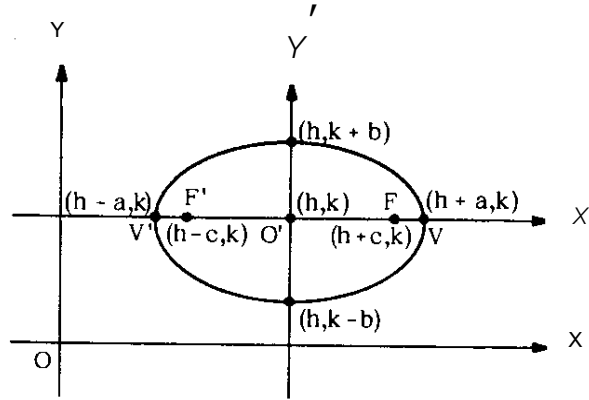
รูปที่ 4

4.3 หลังจากทีนักเรียนได้กราฟวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) ตามต้องการแล้ว ให้นักเรียนคลิกเลือกค่าพารามิเตอร์ h , k , a และ b ค่าใดค่าหนึ่งหรือจะเลือกพร้อมกันก็ได้ แล้วกดปุ่ม + หรือ - เพื่อทำการเพิ่มหรือลดค่าของพารามิเตอร์ ซึ่งการกระทำดังกล่าวจะทำให้จุดศูนย์กลางของกราฟเปลี่ยนไป (เมื่อค่าของ h หรือ k เปลี่ยน) และขนาดของวงรีจะเปลี่ยน (เมื่อค่าของ a และ b เปลี่ยน) หลังจากนั้นให้นักเรียนสังเกตจุดยอด โฟกัสและจุดปลายแกนโทของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) เมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) เพื่อสรุปเป็นรูปแบบในการหาจุดยอด โฟกัสและจุดปลายแกนโทของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) ต่อไป

วงรีที่มีจุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลาง

โดยอาศัยวงรีที่มีจุดศูนย์กลาง คือ (0,0) และการเลื่อนขนานของแกนไปที่จุด (h,k) จะได้วงรีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k) ดังนี้

กรณีที่ 1 วงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน X



สมการวงรี คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ โดย $b^2 = a^2 - c^2$

จะได้ จุดยอด และ

โฟกัส และ

จุดปลายแกนโท และ

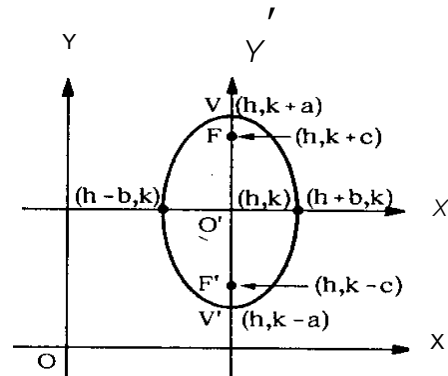
สมการเส้นตรงของแกนเอก คือ $y = k$

สมการเส้นตรงของแกนโท คือ $x = h$

ความยาวแกนเอก $2a$ หน่วย

ความยาวแกนโท $2b$ หน่วย

กรณีที่ 2 วงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน Y



สมการวงรี คือ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ โดย $b^2 = a^2 - c^2$

จะได้ จุดยอด และ
 โฟกัส และ
 จุดปลายแกนโท และ
 สมการเส้นตรงของแกนเอก คือ $x = h$
 สมการเส้นตรงของแกนโท คือ $y = k$
 ความยาวแกนเอก $2a$ หน่วย
 ความยาวแกนโท $2b$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการวงรี เมื่อกำหนดเงื่อนไขให้จุดศูนย์กลาง คือ $(1,-2)$ โฟกัสจุดหนึ่ง คือ $(3,-2)$ และแกนเอกยาว 10 หน่วย

วิธีทำ พิจารณาจุดศูนย์กลาง $(1,-2)$ และโฟกัส $(3,-2)$

จะได้สมการวงรี $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ที่ $h = 1, k = -2$ และ $c = |1-3| = 2$

จาก แกนเอกยาว 10 หน่วย

จะได้ $2a = 10$ ดังนั้น $a = 5$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$= 25 - 4$$

$$b^2 = 21$$

ดังนั้นสมการวงรีนี้ คือ $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{21} = 1$

$$\text{หรือ } 21x^2 + 25y^2 - 42x + 100y - 404 = 0$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท และสมการเส้นตรงของแกนเอก พร้อมเขียนกราฟของ $9x^2 + 5y^2 - 36x - 20y - 124 = 0$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ $9x^2 - 36x + 5y^2 - 20y = 124$

$$9(x^2 - 4x) + 5(y^2 - 4y) = 124$$

$$9(x^2 - 4x + 4) + 5(y^2 - 4y + 4) = 124 + 36 + 20$$

$$\frac{(x-2)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

$$\text{จะได้ว่า } a = 6, b = \sqrt{20}$$

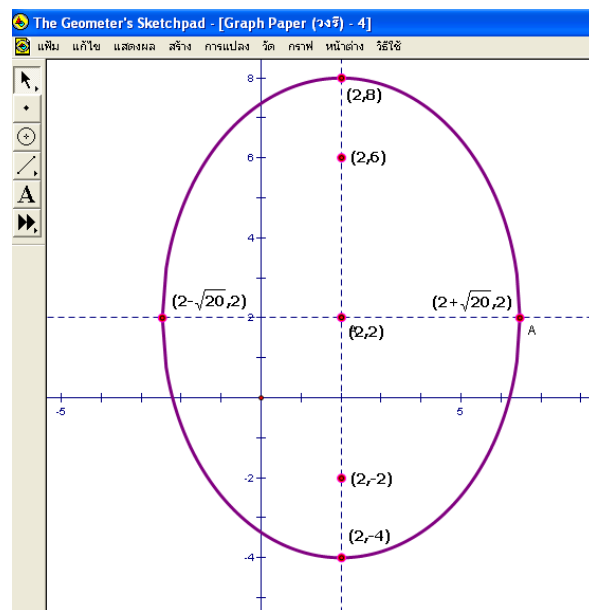
$$\begin{aligned} \text{จาก } b^2 &= a^2 - c^2 \\ c^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 &= 36 - 20 = 16 \\ |c| &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(2, 8)$ และ $(2, -4)$

โฟกัส คือ $(2, 6)$ และ $(2, -2)$

จุดปลายแกนโท คือ $(2 + \sqrt{20}, 2)$ และ $(2 - \sqrt{20}, 2)$

และสมการเส้นตรงของแกนเอก คือ $x = 2$



แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาจุดยอด โฟกัส และสมการเส้นตรงของแกนโท พร้อมเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ โดยใช้โปรแกรม GSP

1) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y = 116 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + 2y^2 + 4x + 2y + 3 = 0 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 25x^2 + 9y^2 + 50x - 36y - 164 = 0 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาสมการวงรี ที่มีสมบัติต่อไปนี้

1) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(-8,1)$ แกนโทยาว 4 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,1)$

.....

.....

.....

.....

.....

2) จุดยอดจุดหนึ่ง คือ จุด $(3,10)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(3,-6)$ จุดศูนย์กลางอยู่บนแกน x

.....

.....

.....

.....

.....

3) โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(-4,-5)$ แกนเอกยาว 14 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-4,1)$

.....

.....

.....

.....

.....

4) จุดยอดจุดหนึ่งคือจุด $(5,-6)$ แกนโทยาว 2 หน่วย จุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $y = 2$

.....

.....

.....

.....

.....

แบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้ที่ 4

1. จงหาสมการวงรี ที่มีสมบัติต่อไปนี้

1) โฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 4, 0)$ จุดยอดอยู่ที่จุด $(\pm 5, 0)$

.....
.....
.....

2) โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, \pm 6)$ แกนโทยาว 16 หน่วย

.....
.....
.....

3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(5, 1)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(5, 4)$ และแกนโทยาว 4 หน่วย

.....
.....
.....

4) โฟกัสอยู่ที่จุด $(4, 2)$ และ $(-2, 2)$ และมีผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ บนวงรีไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 8 หน่วย

.....
.....
.....

5) จุดปลายของแกนเอก คือ $(3, 4)$ และ $(3, -4)$ วงรีผ่านจุด $(0, 0)$

.....
.....
.....

2. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอดและโฟกัส จากสมการวงรีต่อไปนี้

1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$

.....
.....
.....

2) $225x^2 + 289y^2 = 65,025$

.....
.....
.....

3) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$

.....
.....
.....

4) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$

.....
.....
.....

5) $100x^2 + 4y^2 - 1000x - 24y + 2136 = 0$

.....
.....
.....