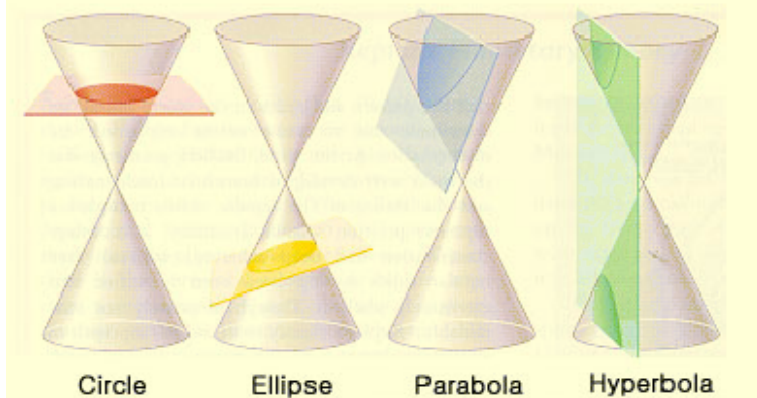


ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน
โดยใช้โปรแกรม GSP

ภาคตัดกรวย (Conic Sections)



หน่วยการเรียนรู้ที่ 5

เรื่อง

ไฮเพอร์โบลา

ชื่อ ชั้น เลขที่

ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน
โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 5 เรื่อง ไฮเพอร์โบลา

คำชี้แจง ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP
ชุดที่ 5 มี 2 ตอน ได้แก่

ตอนที่ 1 นิยามของไฮเพอร์โบลา (ใช้เวลา 2 คาบ)

ตอนที่ 2 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลาง (ใช้เวลา 2 คาบ)

- ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 5 ประกอบด้วย
 - กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 นิยามของไฮเพอร์โบลา
 - กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 ไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลาง
 - แบบฝึกหัดที่ 1
 - แบบฝึกหัดที่ 2
 - แบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้ที่ 5

2. ให้นักเรียนศึกษาชุดการเรียนรู้นี้โดยการใช้โปรแกรม GSP ทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 ตามคำแนะนํามีอยู่ในชุดการเรียนรู้ เพื่อค้นหานิยามของไฮเพอร์โบลาและทำแบบฝึกหัดที่ 1 เมื่อทำแบบฝึกหัดเสร็จแล้ว ครูจึงเฉลยแบบฝึกหัดพร้อมกันทั้งห้อง

3. ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GSP ทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 เพื่อสำรวจไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลาง แล้วทำการสรุป และทำแบบฝึกหัดที่ 2 เมื่อทำแบบฝึกหัดเสร็จแล้ว ครูจึงเฉลยแบบฝึกหัดพร้อมกันทั้งห้อง ทั้งนี้ในระหว่างที่นักเรียนทำกิจกรรม ถ้าหากเกิดปัญหาในการเรียนก็สามารถที่จะซักถามครูหรือเพื่อน ๆ ได้

4. หลังจากนั้นให้นักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน ชุดที่ 5 โดยให้เวลาในการทำประมาณ 20 นาที เพื่อเป็นคะแนนเก็บระหว่างเรียนของนักเรียนแต่ละคน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อนักเรียนศึกษาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 5 แล้ว นักเรียนสามารถ

1. อธิบายความหมายของไฮเพอร์โบล่าได้
2. บอกส่วนต่างๆ ของไฮเพอร์โบล่าเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นไฮเพอร์โบล่าได้
3. เขียนความสัมพันธ์และไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ จากสมบัติที่กำหนดได้
4. เขียนความสัมพันธ์และไฮเพอร์โบล่าที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) จากสมบัติที่กำหนดได้

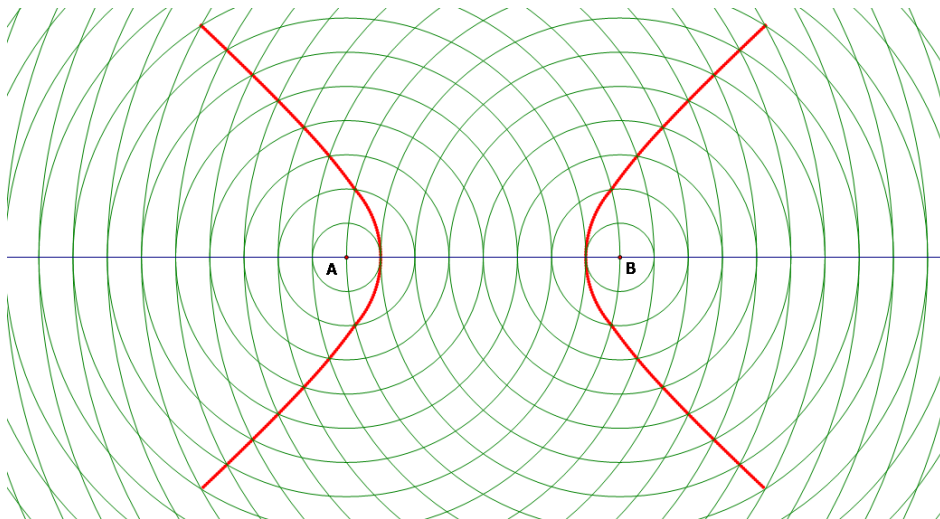
เวลาที่ใช้ 4 คาบ

สื่อการเรียนรู้

1. โปรแกรม GSP (Geometer's Sketchpad)
2. ชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 5

การประเมินผลการเรียนรู้

ให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้แบบสืบสวนสอบสวน โดยใช้โปรแกรม GSP ชุดที่ 5 ด้วยตนเอง เพื่อประเมินความรู้ที่ได้เรียนมา

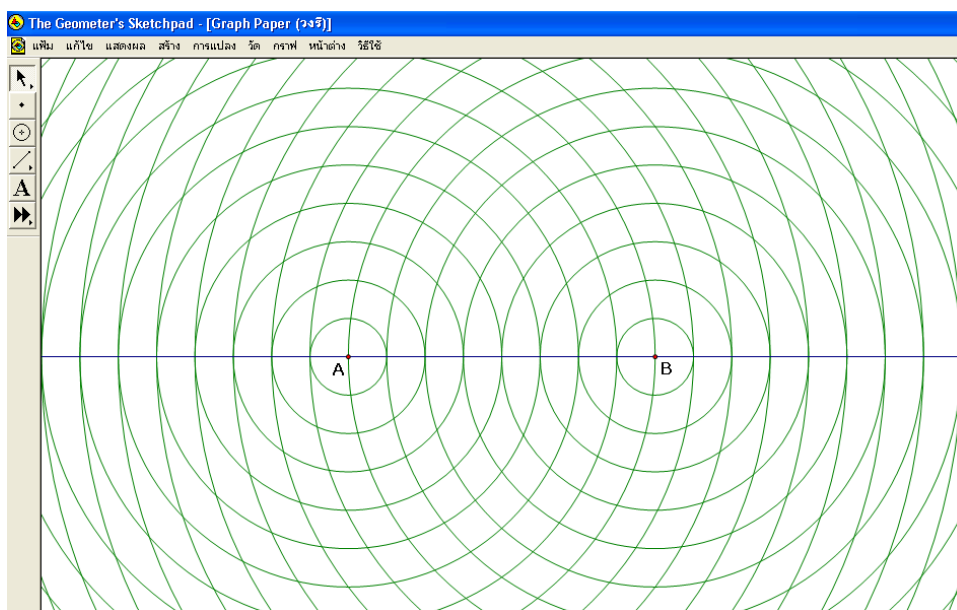


กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1

นิยามของไฮเพอร์โบลา

กิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GSP

1. ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GSP สร้าง Graph Paper ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ 2 จุด และจุดศูนย์กลางทั้งสองนั้นห่างกัน 8 หน่วย พร้อมทั้งตั้งชื่อจุดศูนย์กลางด้วย (เช่น ชื่อจุด A และจุด B) ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 Graph Paper

2. ให้นักเรียนลงจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุด A 1 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 7 หน่วย เอาไว้ 1 จุด แล้วลงจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุด A 7 หน่วย และอยู่ห่างจากจุด B 1 หน่วย อีก 1 จุด

3. จากนั้นให้นักเรียนลงจุดซึ่งเป็นจุดตัดของวงกลม ตามเงื่อนไขดังนี้

- เป็นจุดที่อยู่ห่างจุด A 2 หน่วย ห่างจากจุด B 8 หน่วย และจุดที่อยู่ห่างจุด A 8 หน่วย ห่างจากจุด B 2 หน่วย

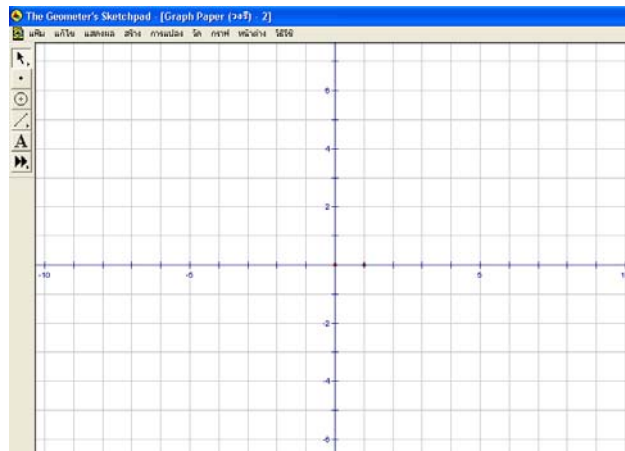
- เป็นจุดที่อยู่ห่างจุด A 3 หน่วย ห่างจากจุด B 9 หน่วย และจุดที่อยู่ห่างจุด A 9 หน่วย ห่างจากจุด B 3 หน่วย

- เป็นจุดที่อยู่ห่างจุด A 4 หน่วย ห่างจากจุด B 10 หน่วย และจุดที่อยู่ห่างจุด A 10 หน่วย ห่างจากจุด B 4 หน่วย

- เป็นจุดที่อยู่ห่างจุด A 5 หน่วย ห่างจากจุด B 11 หน่วย และจุดที่อยู่ห่างจุด A 11 หน่วย ห่างจากจุด B 5 หน่วย

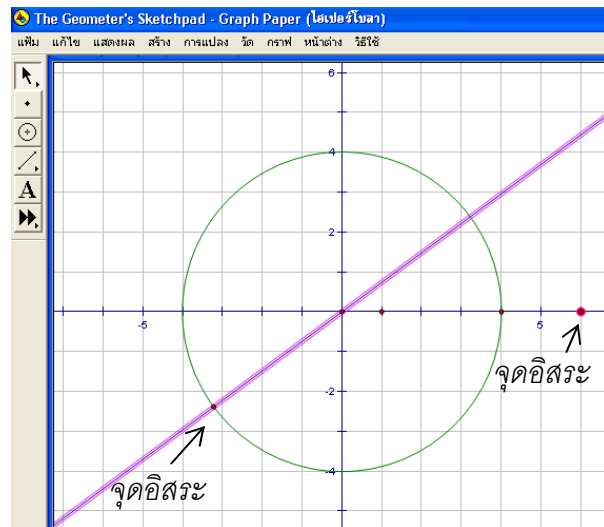
- เป็นจุดที่อยู่ห่างจุด A 6 หน่วย ห่างจากจุด B 12 หน่วย และจุดที่อยู่ห่างจุด A 12 หน่วย ห่างจากจุด B 6 หน่วย

- เป็นจุดที่อยู่ห่างจุด A 7 หน่วย ห่างจากจุด B 13 หน่วย และจุดที่อยู่ห่างจุด A 13 หน่วย ห่างจากจุด B 7 หน่วย
 - เป็นจุดที่อยู่ห่างจุด A 8 หน่วย ห่างจากจุด B 14 หน่วย และจุดที่อยู่ห่างจุด A 14 หน่วย ห่างจากจุด B 8 หน่วย
4. สร้างรอยทางเดินของจุดที่ได้สร้างไว้ตามเงื่อนไข แล้วให้นักเรียนสังเกตลักษณะรอยทางเดินของจุดเหล่านั้นว่ามีรูปเป็นอย่างไร
5. ให้นักเรียนเพิ่มหน้าใหม่จากตัวเลือกเอกสาร หลังจากนั้นให้สร้างระบบพิกัดขึ้นมา (โดยเลือกเป็นกริดจัตุรัส) ดังรูปที่ 2



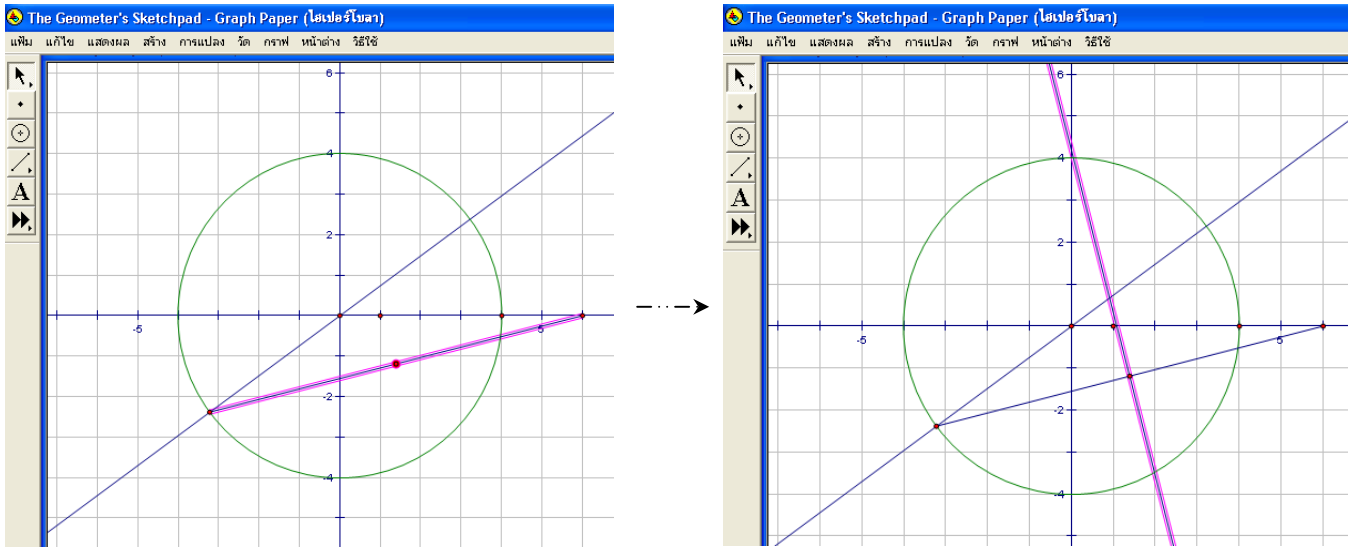
รูปที่ 2 ระบบพิกัด (กริดจัตุรัส)

6. ให้นักเรียนสร้างวงกลมไว้ในระบบพิกัดจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) รัศมียาวพอสมควร แล้วให้ลงจุดอิสระไว้บนเส้นรอบวง 1 จุด พร้อมทั้งสร้างเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางกับจุดอิสระนี้ หลังจากนั้นให้ลงจุดอิสระอีก 1 จุด ไว้นอกวงกลม โดยอยู่ห่างจากเส้นรอบวงไม่มากนัก ดังรูปที่ 3



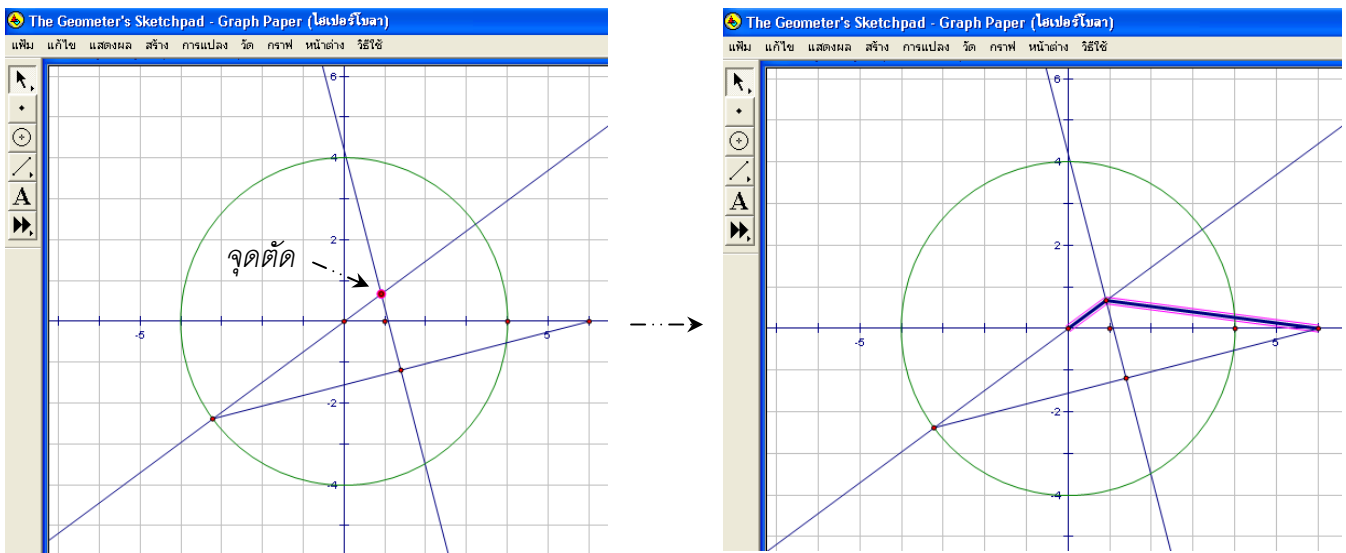
รูปที่ 3

7. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดอิสระทั้ง 2 จุด จากข้อ 6 แล้วสร้างจุดกึ่งกลางบนส่วนของเส้นตรงนี้ จากนั้นให้สร้างเส้นตั้งฉากผ่านจุดกึ่งกลางนี้ ดังรูปที่ 4



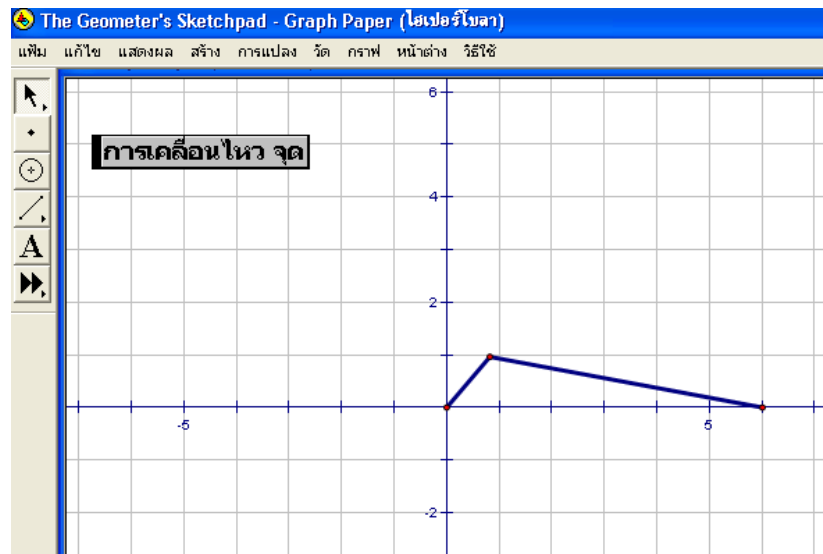
รูปที่ 4

8. ให้นักเรียนนำจุดมาลงตรงที่เป็นตำแหน่งจุดตัดระหว่างเส้นตรงกับเส้นตั้งฉาก หลังจากนั้น ให้สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมกับจุดตัด และส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดตัดกับจุดอิสระที่อยู่ภายนอก พร้อมทั้งแสดงส่วนของเส้นตรงเป็นเส้นหนา ดังรูปที่ 5



รูปที่ 5

9. จากรูปที่ 5 ให้นักเรียนสร้างปุ่มเพื่อเคลื่อนที่จุดอิสระบนเส้นรอบวง และสร้างรอยทางเดินของจุดตัดที่ได้จากข้อ 8 แล้วซ่อนเส้นและจุดที่ไม่ใช้ จนเหลือส่วนของเส้นตรง ดังรูปที่ 6



รูปที่ 6

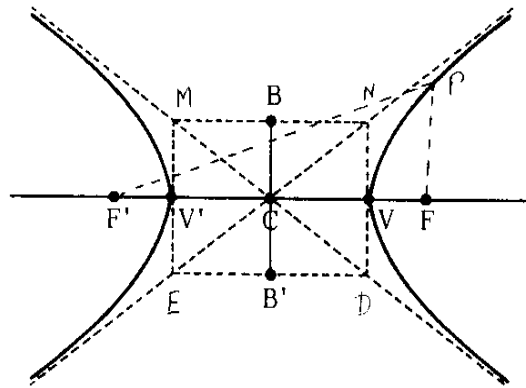
10. จากนั้นใช้คำสั่งการวัดเพื่อวัดความยาวส่วนของเส้นตรงทั้ง 2 เส้น และเมื่อกดปุ่มเคลื่อนที่จุดแล้ว ให้นักเรียนสังเกตลักษณะรอยทางเดินของจุด กับผลลบของความยาวส่วนของเส้นตรงทั้ง 2 เส้น แล้วสรุปเป็นนิยามของไฮเพอร์โบล่า

ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

บทนิยาม ไฮเพอร์โบลา คือ

.....

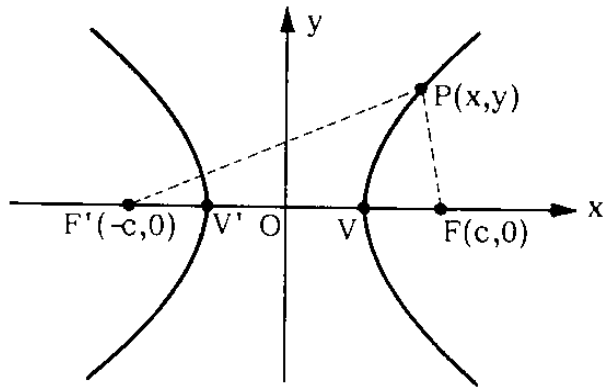
.....



- จุดคงที่ (จุด F' และ F) เรียกว่า **ไฟกัส**
- P เป็นจุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลา $|PF' - PF|$ เรียกว่า **ผลต่างคงตัว**
- จุดกึ่งกลางระหว่างไฟกัสทั้งสอง (จุด c) เรียกว่า **จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา**
- จุดที่เส้นตรงซึ่งลากผ่านไฟกัสทั้งสองตัดไฮเพอร์โบลา (V' และ V) เรียกว่า **จุดยอดของไฮเพอร์โบลา**
- ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดยอดทั้งสอง ($\overline{V'V}$) เรียกว่า **แกนตามขวาง (Transverse axis)**
- ส่วนของเส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลา ($\overline{BB'}$) เรียกว่า **แกนสังยุค (Conjugate axis)**
- รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ด้านทั้งสี่ผ่านจุดยอดและจุดปลายแกนสังยุค ($\square MNDE$) เรียกว่า **สี่เหลี่ยมกำกับ**
- เส้นตรงที่ลากทับเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมกำกับ (\overline{MD} และ \overline{NE}) เรียกว่า **เส้นกำกับ (Asymptotes)**

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุด $(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง

กรณีที่ 1 โฟกัสอยู่บนแกน X อยู่ที่ $(-c,0)$ และ $(c,0)$



ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลา โดยผลลบคงตัวเท่ากับ $2a$ หน่วย

จากบทนิยาม จะได้ว่า $|PF' - PF| = \dots\dots$ โดยที่ $2a < 2c$ เมื่อ $a > 0$

จะได้ $|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = \dots\dots$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

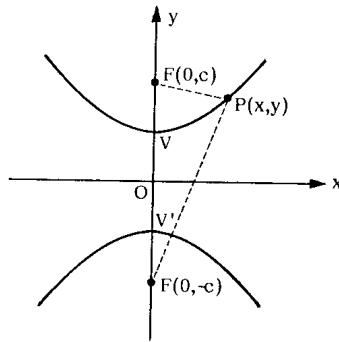
เนื่องจาก $0 < 2a < 2c$ เพราะฉะนั้น $a^2 < c^2$ นั่นคือ $c^2 - a^2 > 0$

ให้ $b^2 = c^2 - a^2$ นั่นคือ

สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และแกนตามขวางอยู่บนแกน X

คือ

กรณีที่ 2 โฟกัสอยู่บนแกน Y อยู่ที่ $(0,-c)$ และ $(0,c)$



ในการทำงานเดียวกับกรณีที่ 1 จะได้

สมการไฮเพอร์โบลาที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y คือ

ตารางเปรียบเทียบไฮเพอร์โบลาที่จุด $(0,0)$ เป็นจุดศูนย์กลาง มีแกนตามขวางเป็นแกน X หรือแกน Y

สมการ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	สมการ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 5px;">$b^2 = c^2 - a^2$</div> <div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 5px; margin-left: 20px;">$c > a > 0$</div>	
แกนตามขวางอยู่บนแกน X	แกนตามขวางอยู่บนแกน Y
โฟกัส $(c,0)$ และ $(-c,0)$ จุดยอด และ จุดปลายแกนสังยุค และ แกนตามขวางยาว หน่วย แกนสังยุคยาว หน่วย เลตัสเรกตรัมยาว หน่วย สมการเส้นกำกับ คือ และ	โฟกัส $(0,c)$ และ $(0,-c)$ จุดยอด และ จุดปลายแกนสังยุค และ แกนตามขวางยาว หน่วย แกนสังยุคยาว หน่วย เลตัสเรกตรัมยาว หน่วย สมการเส้นกำกับ คือ และ

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ ซึ่งมีกราฟเป็นไฮเพอร์โบลา จงหาจุดยอด โฟกัส และจุดปลายแกนสังยุค พร้อมเขียนกราฟโดยใช้โปรแกรม GSP

1) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 16x^2 - 25y^2 = 400 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2y^2 - x^2 - 36 = 0 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีสมบัติต่อไปนี้

- 1) โฟกัสอยู่ที่จุด $(2,0)$ และ $(-2,0)$ และผลต่างระหว่างระยะจากจุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 1 หน่วย

.....

.....

.....

.....

.....

- 2) จุดศูนย์กลาง $(0,0)$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0,5)$ โดยมี $(3,0)$ เป็นจุดปลายข้างหนึ่งของแกนสังยุค

.....

.....

.....

.....

.....

- 3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ จุดปลายข้างหนึ่งของแกนสังยุคคือจุด $(0,2)$ และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(-7,0)$

.....

.....

.....

.....

.....

- 4) โฟกัสอยู่ที่ $(-8,0)$ และ $(8,0)$ และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-5,0)$

.....

.....

.....

.....

.....

กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (h , k) เป็นจุดศูนย์กลาง

กิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม GSP

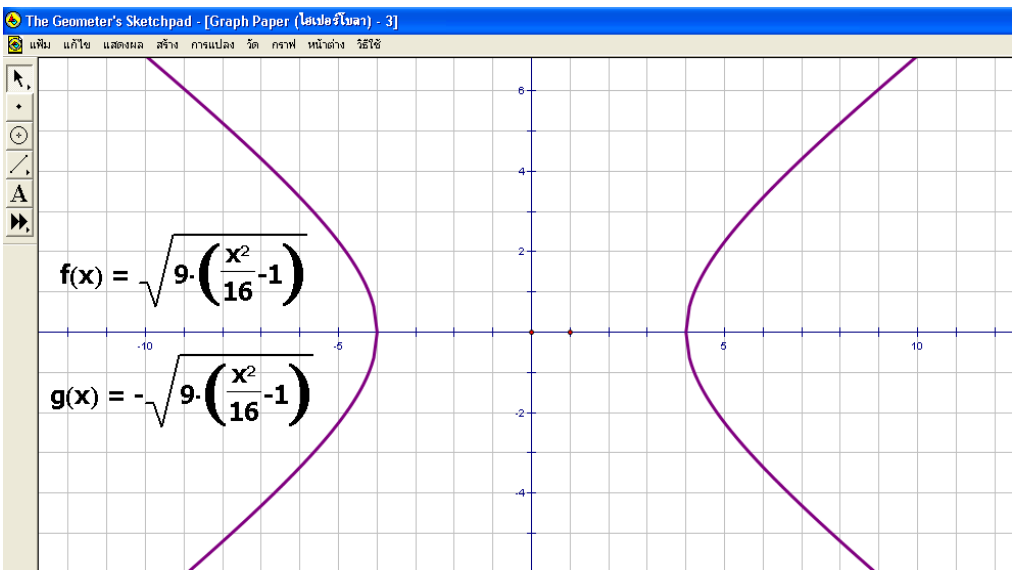
1. ให้นักเรียนใช้โปรแกรม GSP สร้างกราฟไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (0,0) เป็นจุดศูนย์กลาง ขึ้นมา 1 รูป โดยเลือกเมนูแล้วไปที่ กราฟ → วาดกราฟของฟังก์ชันใหม่ แล้วใส่สมการไฮเพอร์โบลาเข้าไป

(หมายเหตุ : นักเรียนต้องจำไว้ว่าโปรแกรม GSP จะเขียนกราฟของฟังก์ชันเท่านั้น เช่น ถ้าต้องการกราฟไฮเพอร์โบลา จากสมการ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ นักเรียนจะต้องจัดสมการใหม่ให้อยู่

ในรูปของฟังก์ชัน คือ $y = \pm \sqrt{9\left(\frac{x^2}{16} - 1\right)}$ ซึ่งก็คือ $f(x) = \pm \sqrt{9\left(\frac{x^2}{16} - 1\right)}$ นั่นเอง)

2. ให้นักเรียนเลื่อนไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (0,0) เป็นจุดศูนย์กลางที่สร้างขึ้น ไปไว้ที่จุด (h,k) แล้วแต่นักเรียนจะกำหนด โดยมีขั้นตอน ดังนี้

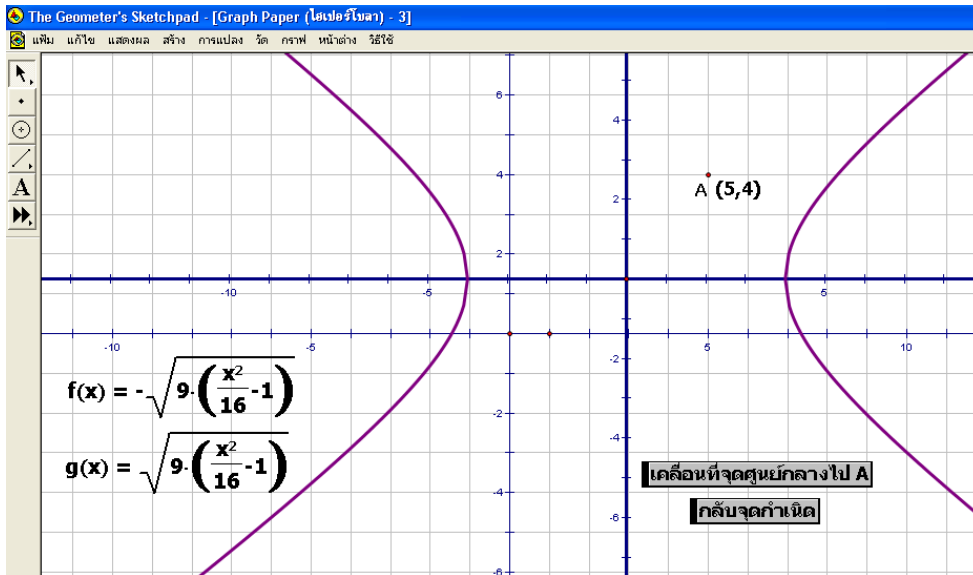
2.1 ให้คลิกเลือกจุดศูนย์กลาง (0,0) แกน X แกน Y และกราฟไฮเพอร์โบลาที่สร้างไว้ แล้วทำการคัดลอก จากนั้นให้ซ้อนกราฟไฮเพอร์โบลารูปเดิม ก็จะได้ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

2.2 ให้นักเรียนทำการสแนพจุด โดยเลือกเมนูแล้วไปที่ กราฟ → สแนพจุด จากนั้นให้ลงจุดอิสระ (h,k) ไว้ที่พิกัดใด ๆ ก็ได้ 1 จุด พร้อมทั้งตั้งชื่อ เช่น จุด A แล้วสร้างปุ่มการเคลื่อนที่เพื่อเลื่อนจุดศูนย์กลางไปหาจุด A และสร้างปุ่มการเคลื่อนที่เพื่อเลื่อนจุดศูนย์กลางไปหาจุดกำเนิด (0,0) ด้วย ดังรูปที่ 2 หลังจากนั้นให้นักเรียนลองเลื่อนจุด A ไปไว้ที่พิกัดต่าง ๆ แล้วกดปุ่มเลื่อนจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาไปหาจุด A พร้อมทั้งสังเกตพิกัดของจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาที่เปลี่ยนไปตามจุด A เช่น

- พิกัดของจุด A คือ จะได้จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ
- พิกัดของจุด A คือ จะได้จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ
- พิกัดของจุด A คือ จะได้จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ

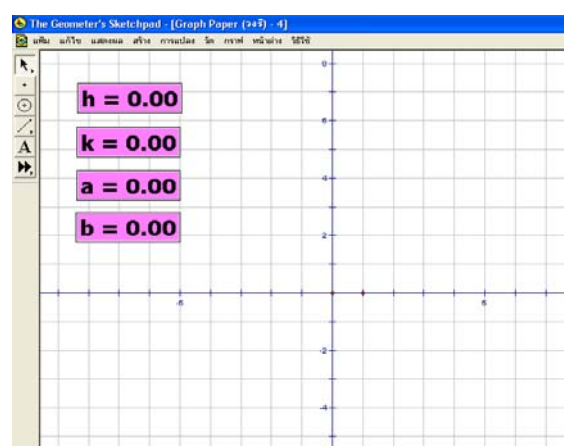
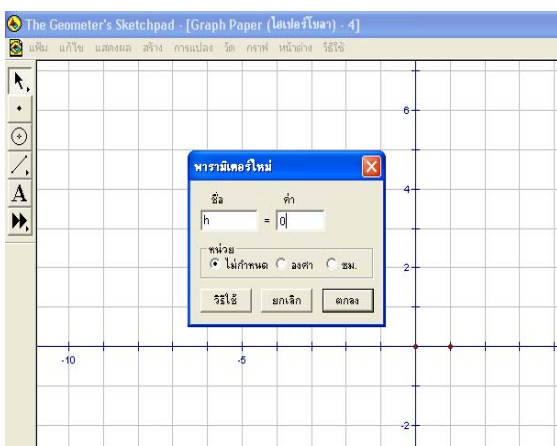


รูปที่ 2

3. จากไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (0,0) เป็นจุดศูนย์กลาง และเลื่อนขนานแกนไปที่ (h,k) ดังนั้นสมการไฮเพอร์โบลาเมื่อเทียบกับแกนใหม่ คือ $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ และ $\frac{(y')^2}{a^2} - \frac{(x')^2}{b^2} = 1$ แต่จากการเลื่อนขนานของแกน นักเรียนทราบมาแล้วว่า $x' = \dots\dots\dots$ และ $y' = \dots\dots\dots$ ดังนั้นจะได้สมการไฮเพอร์โบลาเทียบกับแกนเดิม คือ $\frac{(\dots\dots\dots)^2}{a^2} - \frac{(\dots\dots\dots)^2}{b^2} = 1$ และ $\frac{(\dots\dots\dots)^2}{a^2} - \frac{(\dots\dots\dots)^2}{b^2} = 1$ ตามลำดับ

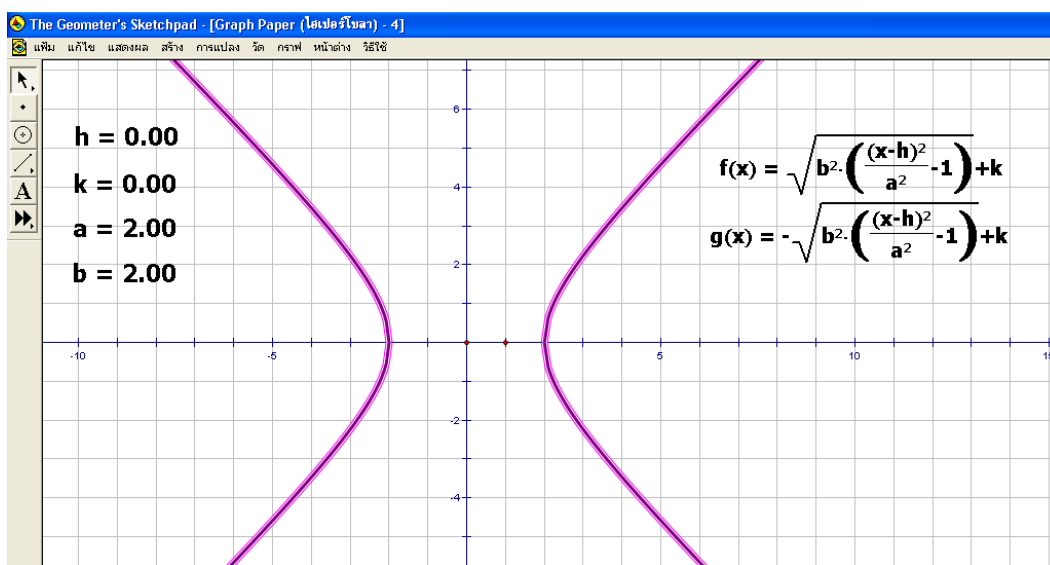
4. ให้นักเรียนสร้างหน้าต่างเอกสารใหม่ แล้วสร้างกราฟไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลาง ตามขั้นตอนต่อไปนี้

4.1 สร้างระบบพิกัดเป็นกริดแบบจัตุรัส แล้วไปที่ กราฟ → พารามิเตอร์ใหม่ ตั้งชื่อ h และค่าเป็น 0 ดังรูปที่ 3 โดยให้นักเรียนใช้คำสั่งพารามิเตอร์ใหม่นี้สร้างค่าของ k , a และ b ด้วย ตามลำดับ



รูปที่ 3

4.2 ให้นักเรียนใช้คำสั่ง **วาดกราฟของฟังก์ชันใหม่** เพื่อเขียนกราฟไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) ซึ่งนักเรียนจะต้องจัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน โดยสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จัดสมการใหม่เป็น $y = \pm \sqrt{b^2 \left(\frac{(x-h)^2}{a^2} - 1 \right)} + k$ และสมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ จัดสมการใหม่เป็น $y = \pm \sqrt{b^2 \left(\frac{(y-k)^2}{b^2} - 1 \right)} + h$ เมื่อนักเรียนจัดสมการใหม่ได้แล้วให้สร้างสมการในคำสั่งเขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่ โดยแทนค่าของ h , k , a และ b ด้วยค่าพารามิเตอร์ที่ได้สร้างไว้ก็จะได้กราฟไฮเพอร์โบลิตามต้องการ ดังรูปที่ 4 (เป็นกราฟของสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$)



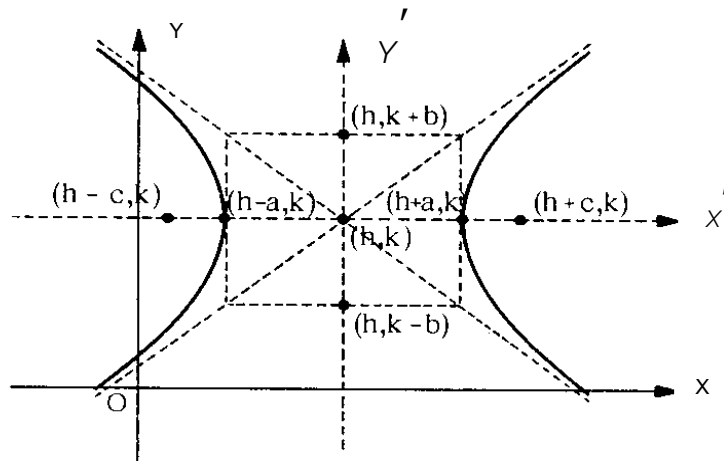
รูปที่ 4

4.3 หลังจากที่นักเรียนได้ไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลางตามต้องการแล้วให้นักเรียนคลิกเลือกค่าพารามิเตอร์ h , k , a และ b ค่าใดค่าหนึ่งหรือจะเลือกพร้อมกันก็ได้ แล้วกดปุ่ม $+$ หรือ $-$ เพื่อทำการเพิ่มหรือลดค่าของพารามิเตอร์ ซึ่งการกระทำดังกล่าวจะทำให้จุดศูนย์กลางของกราฟเปลี่ยนไป (เมื่อค่าของ h หรือ k เปลี่ยน) และขนาดของไฮเพอร์โบลาก็จะเปลี่ยน (เมื่อค่าของ a และ b เปลี่ยน) หลังจากนั้นให้นักเรียนสังเกตจุดยอด โฟกัสและจุดปลายแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) เมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ เพื่อสรุปเป็นรูปแบบในการหาจุดยอด โฟกัสและจุดปลายแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) ต่อไป

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (h,k) เป็นจุดศูนย์กลาง

เช่นเดียวกับภาคตัดกรวยชนิดอื่นๆ ที่กล่าวไปแล้ว เราสามารถใช้ความรู้เรื่องการเลื่อนขนานแกนไปที่จุด (h,k) และไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ จะได้ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และแกนตามขวางขนานกับแกน X หรือแกน Y ดังนี้

กรณีที่ 1 แกนตามขวางขนานกับแกน X

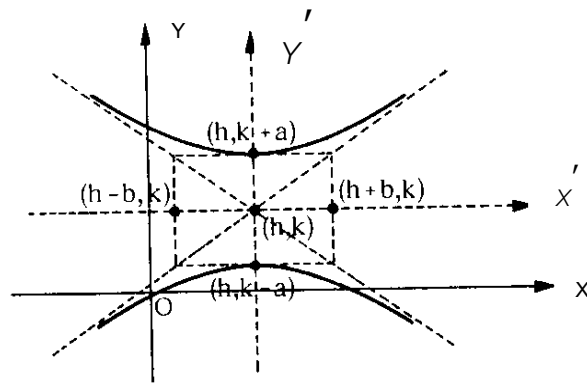


สมการ คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ โดย $b^2 = c^2 - a^2$

ส่วนประกอบของกราฟ

- (1) จุดศูนย์กลาง คือ.....
- (2) จุดยอด คือ.....
- (3) โฟกัส คือ.....
- (4) จุดปลายแกนสังยุค คือ.....
- (5) สมการเส้นตรงของแกนตามขวาง คือ.....
- (6) สมการเส้นตรงของแกนสังยุค คือ.....
- (7) ความยาวแกนตามขวาง
- (8) ความยาวแกนสังยุค.....
- (9) เลตัสเรกตรัมยาว.....
- (10) สมการของเส้นกำกับ คือ.....

กรณีที่ 2 แกนตามขวางขนานกับแกน Y



สมการ คือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ โดย $b^2 = c^2 - a^2$

ส่วนประกอบของกราฟ

- (1) จุดศูนย์กลาง คือ.....
- (2) จุดยอด คือ.....
- (3) โฟกัส คือ.....
- (4) จุดปลายแกนสังยุค คือ.....
- (5) สมการเส้นตรงของแกนตามขวาง คือ.....
- (6) สมการเส้นตรงของแกนสังยุค คือ.....
- (7) ความยาวแกนตามขวาง
- (8) ความยาวแกนสังยุค.....
- (9) เลตัสเรกตรัมยาว.....
- (10) สมการของเส้นกำกับ คือ.....

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการไฮเพอร์โบลา เมื่อกำหนดให้จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-4, 1)$ จุดยอดจุดหนึ่งคือ $(2, 1)$ และความยาวแกนสังยุคเท่ากับ 8 หน่วย

วิธีทำ พิจารณาจุดศูนย์กลาง $(-4, 1)$ และจุดยอด $(2, 1)$

จะได้สมการไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ที่มี $h = -4$, $k = 1$

ความยาวแกนสังยุคเท่ากับ 8 หน่วย

จะได้ $2b = 8$

$b = 4$

และจุดยอด คือ $(h + a, k) = (2, 1)$

$$h + a = 2$$

$$-4 + a = 2$$

$$a = 6$$

$$\text{ดังนั้นสมการไฮเพอร์โบลา นี้ คือ } \frac{(x+4)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

$$\text{หรือ } 16x^2 - 36y^2 + 128x + 72y - 356 = 0$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดยอด โฟกัส และจุดปลายแกนสังยุค พร้อมเขียนกราฟของ

$$3x^2 - 2y^2 - 6x + 8y + 7 = 0$$

วิธีทำ จัดสมการใหม่ $3x^2 - 6x - 2y^2 + 8y = -7$

$$3(x^2 - 2x) - 2(y^2 - 4y) = -7$$

$$3(x^2 - 2x + 1) - 2(y^2 - 4y + 4) = -7 + 3 - 8$$

$$3(x-1)^2 - 2(y-2)^2 = -12$$

$$\frac{(y-2)^2}{6} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

เมื่อเทียบกับสมการ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ จะได้ $a = \sqrt{6}$, $b = 2$

$$\text{จาก } b^2 = c^2 - a^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

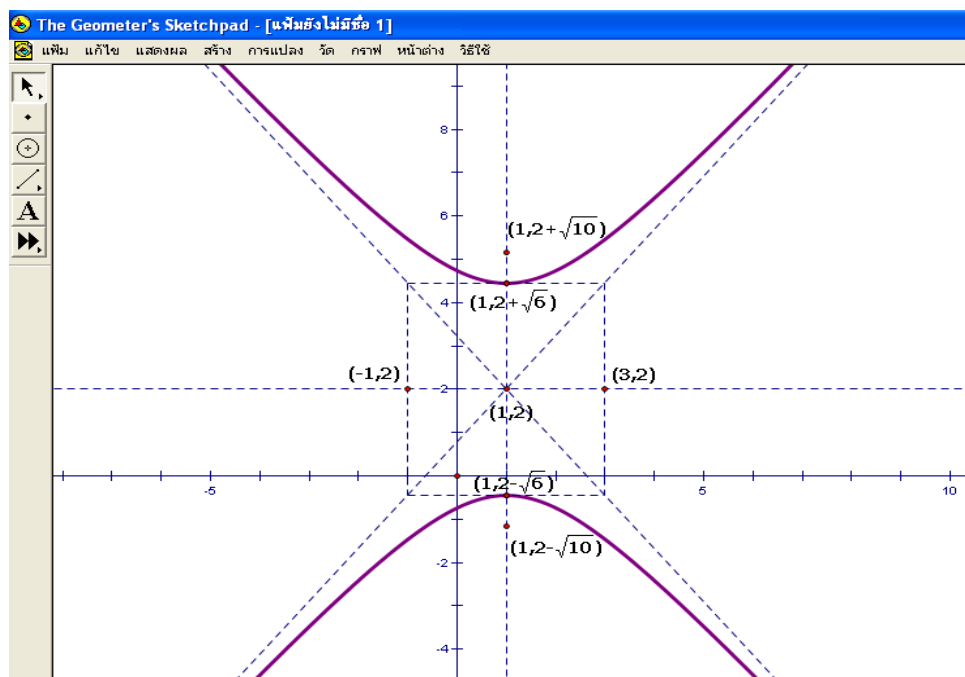
$$c^2 = 6 + 4 = 10$$

$$|c| = \sqrt{10}$$

ดังนั้น จุดยอด คือ $(1, 2 + \sqrt{6})$ และ $(1, 2 - \sqrt{6})$

โฟกัส คือ $(1, 2 + \sqrt{10})$ และ $(1, 2 - \sqrt{10})$

จุดปลายแกนสังยุค คือ $(3, 2)$ และ $(-1, 2)$



แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาจุดยอด โฟกัส และจุดปลายแกนตั้งยุค พร้อมเขียนกราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ โดยใช้โปรแกรม GSP

1) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{(x-3)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 - 6x^2 + 2y + 36x = 59 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3) $\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3y^2 - 20x - 24y - 4 = 0 \}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีสมบัติต่อไปนี้

1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-7,0)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุดกำเนิด แกนตามขวางยาว 6 หน่วย

.....
.....
.....
.....
.....

2) จุดยอดอยู่ที่จุด $(4,0)$ และ $(4,4)$ แกนสังยุคยาว 4 หน่วย

.....
.....
.....
.....
.....

3) จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(2,6)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(4,6)$ และจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน y

.....
.....
.....
.....
.....

4) จุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $y = 4$ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่จุด $(0,2)$ และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0,1)$

.....
.....
.....
.....
.....

แบบทดสอบท้ายชุดการเรียนรู้ที่ 5

1. จงหาสมการไฮเพอร์โบลา ที่มีสมบัติต่อไปนี้

1) โฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 5, 0)$ แกนตามขวางยาว 8 หน่วย

.....

.....

.....

2) โฟกัสอยู่ที่จุด $(0, \pm 13)$ แกนสังยุคยาว 24 หน่วย

.....

.....

.....

3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(8, 0)$ และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(6, 0)$

.....

.....

.....

4) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4, -5)$ โฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4, -2)$ แกนตามขวางยาว 4 หน่วย

.....

.....

.....

5) จุดยอดอยู่ที่ $(-1, -3)$ และ $(-1, 5)$ ไฮเพอร์โบลาผ่านจุด $(-3, -5)$

.....

.....

.....

2. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัสและจุดปลายแกนสังยุค จากสมการไฮเพอร์โบล่าต่อไปนี้

1) $4x^2 - y^2 = 16$

.....
.....
.....

2) $x^2 - y^2 + 9 = 0$

.....
.....
.....

3) $9y^2 - 16x^2 = 144$

.....
.....
.....

4) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y + 1 = 0$

.....
.....
.....

5) $25x^2 - 9y^2 + 50x + 36y - 236 = 0$

.....
.....
.....

.....
.....